

# A Simple Version of the Romer model

Shiro KUWAHARA  
Research/Romer01.tex

February 3, 2025

## 1 緒言

内生的成長理論 (Endogenous Growth Theory) 勃興の出発点となった劃期的な論文である Romer(1990) は中間財の種類が拡張していくモデルである。最も簡単な形として単純労働  $L$  と人的資本  $H$  の区別を無くし, 更に中間財に使用する原料を耐久財としての資本から非耐久財としての最終財に変更したバージョンを先ず提示し, 分析をする。その後分権経済と集権経済の違いを概観する。最後に労働分配率に関して議論する。

この他, Benhabib et. al.(1994) が拡張した中間財の補完性を入れたバージョンや (定常状態しかない本形式では非決定性は出ない) R&D 関数を非線形な Jones(1995) technology に変更したものが重要であり, 参考にされたい。

更に, 簡略形として本稿と同じく  $L$  と  $H$  の区別を無くす一方で Romer(1990) の中間財を耐久財にする仮定を温存して遷移動学を出して分析したものが Arnold (1998) であり, R&D 投入を労働ではなく最終財にして分析したのが Barro & Sala-i-Martin (2003) である。これらも参考にされたい。

なお本稿は岩井 (1994) や D,Romer (2011) を読了したか併読中程度の読者を想定しており学部上級から大学院 1 回程度のマクロ経済学の基礎知識 (Solow model から Ramsey-Cass-Koopmans model) を前提としている。

## 2 最終財部門 (Final good sector)

労働と  $A$  種類のタイプの中間財の群から最終財は作られる。最終財の生産技術たる生産函数を以下に仮定する：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x(i)^\alpha di, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (1)$$

此処で  $Y$ ,  $L_Y$ ,  $x(i)$  そして  $A$  はそれぞれ総生産, 最終財生産への労働投入, 第  $i$  中間財部門への中間財投入, そして中間財の数である。

最終財部門は完全競争を仮定する。この時、この生産函数 (1) を持った恰も単一の企業が生産しているかのように最適化問題を記述し、市場の均衡条件式を導き出すことが出来る。また最終財を numeraire にする。

最終財部門の利潤  $\pi^Y$  は以下で与えられる：

$$\Pi^Y = Y - wL_Y - \int_0^A p(i)X(i)di, \quad (2)$$

此処で  $w, p(i)$  は実質賃金と第  $i$  部門での需要である。

利潤最適化の為の一階の条件：

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = 0. \quad (3)$$

これらを計算してみると

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = \frac{\partial Y}{\partial L_Y} - w = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = \frac{\partial Y}{\partial X(i)} - p(i) = 0. \quad i \in (0, A) \quad (5)$$

(4) と (5) に (1) を代入して計算する：

$$(1 - \alpha)L_Y^{-\alpha} \int_0^A X(i)^\alpha di - w = 0, \quad (6)$$

$$\alpha L_Y^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - p(i) = 0. \quad (7)$$

### 3 中間財部門 (Intermediate good sector)

生産構造 (最終財  $\eta$  単位で中間財 1 単位生産出来ると仮定する)：

$$X(i) = \frac{1}{\eta} Y(i), \quad \eta > 1 \quad (8)$$

此処で  $Y(i)$  は第  $i$  部門で使用される最終財。

第  $i$  部門の中間財部門の利潤  $\pi(i)^M$ ：

$$\Pi(i)^M = p(i)X(i) - Y(i) = p(i)X(i) - \eta X(i). \quad (9)$$

中間財部門は発明者 (後から説明) から購入した知的財産権 (特許) を背景に独占的に供給出来る。最終財は購入しないよりも購入した方がマシになるの

で購入するが、価格とともに購入量は減少。その関係は最終財の最適化条件 (7) ( $p(i) = \alpha L_Y^{-\alpha} X(i)^{\alpha-1}$ ) で示される。

最適化問題は

$$\text{Max } \Pi(i)^M, \quad \text{s.t. Eq. (7)}$$

より以下の形となる：

$$\max_{X(i)} \Pi(X(i))^M = \alpha L_Y^{1-\alpha} X(i)^\alpha - \eta x(i). \quad (10)$$

よって一階の条件は

$$\frac{\partial \Pi(X(i))^M}{\partial X(i)} = \alpha^2 L_Y^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - \eta = 0. \quad (11)$$

これより最適な行動下での中間財生産：

$$X(i) = \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y. \quad (12)$$

(12) 式を (7) 式に代入して中間財の独占価格：

$$p(i) = \frac{\eta}{\alpha} (> \eta) \quad (13)$$

を得る。 $p(i) > \eta$  (単位コスト = 限界コスト) なので独占価格付けとなっている。詰まり完全競争下で成立する費用 = 価格が破られており、完全競争ではない = パレート最適ではない = 政策介入の余地がある為に、政策介入の余地があるということになる。分権経済の非パレート最適性は後に計画経済下での経路を解いてその異同を調べることにする。

また各企業は対称。 $X(i) = \tilde{X}$ ,  $p(i) = \tilde{p}$ ,  $\Pi(i) = \tilde{\Pi}$  と書ける。

## 4 研究開発部門 (R&D sector)

知識総生産函数 (R&D 函数)：

$$\dot{A} = \delta A L_A, \quad \delta > 0, \quad (14)$$

where  $\dot{Z} \equiv \frac{dZ(t)}{dt}$ , and  $L_A$  denotes labor input on R&D sector.

(14) は Romer 型の R&D 函数であり、特徴としては  $A$  と  $L_A$  に関して線形。

$\dot{A}$  は新しく発明される知識であり 1 つの特許でカバーされるとする。 $A$  は社会全体の知識量なので  $\dot{A}$  も社会全体の新知識の量。

研究開発部門は自由参入。 $j$  社の確保する特許は全体の R&D 投入量に対する  $j$  社の投入量の比率に比例する。全体の R&D 投入 (労働) 量  $L_A$  に対して  $j$  社の労働投入量を  $L_A(j)$  とする。この時利潤は以下の如し。

R&D 部門の利潤  $\pi(j)^R$  :

$$\pi(j)^R = \dot{A} \tilde{V} \frac{L_A(j)}{L_A} - wL_A(j), \quad (15)$$

where  $\tilde{V}$  denotes 1つの特許によって得られる独占利潤流列の現在価値, 詰まり発明成功による価値 (収入の総和) :

$$\tilde{V} = \int_0^{\infty} \tilde{\Pi} e^{-\int_0^t r(s) ds} dt \quad (16)$$

利潤最大化の一階の条件 :

$$\frac{\partial \pi(j)^R}{\partial L_A(j)} = \dot{A} \tilde{V} \frac{1}{L_A} - w \quad (17)$$

$L_A(j)$  に関して線形なので一階の条件だけでは生産量は決まらない。

更に R&D 活動には自由参入なので利潤が正である限り無限の企業が参入してきてしまう。従って R&D 活動が行われる ( $L_A > 0$ ) 時には自由参入の元で利潤ゼロ条件 ( $\pi(j)^R = 0$ ) が満たされなくてはならない。

また一階の条件が負 ((17) < 0) の時は, 全 R&D 活動が停止する ( $L_A = 0$ ) ことになる (固定費用がないので損益分岐点 = 操業停止点)。

R&D の発生条件 :

$$\dot{A} \tilde{V} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} wL_A \iff L_A \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \end{array} \right\} 0. \quad (18)$$

ここで  $\tilde{V}$  はこの経済の資産。以下の資産方程式 (asset equation) or 無裁定条件式 (no-arbitrage equation) を満たす

$$r\tilde{V} = \dot{\tilde{V}} + \tilde{\Pi} \quad (19)$$

## 5 家計 (household)

通常の家計を想定。無限期存続して一定の主観的割引率と消費からのみ効用を得る瞬時的効用函数を持つとする :

$$U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0 \quad (20)$$

通常最適化問題を解いて通常 Euler 方程式を得る :

$$\theta \frac{\dot{c}}{c} = r - \rho. \quad (21)$$

## 6 マクロ均衡

(12) 式を (1) 式に代入：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \left( \left[ \frac{\alpha^2}{\eta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \right)^\alpha di = \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL_Y \quad (22)$$

ここで  $\int_0^A (const) di = (const) \int_0^A di = (const)[i]_0^A = (const)A$  であることに注意。

同様に (12) を (6) に代入：

$$w = (1 - \alpha) \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A \left( = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_A} \right) \quad (23)$$

また (12) , (13) を (9) に代入：

$$\tilde{\Pi}^M = \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \eta \tilde{X} = \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \eta \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y = (1 - \alpha) \alpha \frac{Y}{A}. \quad (24)$$

この簡略化されたモデルでは資本は含まれない。最終財は中間財が消費財に利用される。

$$Y = C + \eta X \quad (25)$$

ここで  $C = L_C$  であり，各部門の対称性より  $X \equiv \int_0^A X(i) di = A\tilde{X}$ 。

(12) と (22) より

$$\begin{aligned} C = Y - \eta X &= \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \eta \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] AL_Y \\ &= (1 - \alpha^2) \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL_Y = (1 - \alpha^2) Y. \end{aligned} \quad (26)$$

(18) より R&D が行われる均衡では (14) を代入して

$$\delta AL_A \tilde{V} = w L_A. \quad (27)$$

この (27) 式に (23) を代入して以下を得る：

$$\tilde{V} = \frac{w}{\delta A} = \frac{1 - \alpha}{\delta} \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (28)$$

また労働賦存は外生・一定。  $L$  は定数。  $L_Y = uL$  ,  $L_A = (1 - u)L$  と書き直すと変化するのは  $u$  の部分のみ。

## 7 動学方程式の導出

ここまで出て来た動学方程式は (14), (19) そして (21)。対応する動学変数は  $A, \tilde{V}, c$ 。5 節の表記を利用してこれらを書き換えていく。

(21) に  $C = cL, L_Y = uL$  及び (14), (26) を代入。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{C}}{C} - \underbrace{\frac{\dot{L}}{L}}_{\dot{L}=0} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{u}}{u} = \delta(1-u)L + \frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \quad (29)$$

$A, \dot{A}, c$  と  $\dot{c}$  の情報が  $u$  と  $\dot{u}$  と  $r$  で書き換えられた。

(19) に  $\tilde{V}$  と  $\tilde{\Pi}$  の情報を入れていく。

(28) より  $\dot{\tilde{V}} = 0$ , (24) を (19) に代入し, 以下を得る:

$$r = \frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{V}} = \frac{(1-\alpha)\alpha\frac{Y}{A}}{\frac{1-\alpha}{\delta}\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{(1-\alpha)\alpha\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}uL}{\frac{1-\alpha}{\delta}\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}} = \alpha\delta uL \quad (30)$$

$\tilde{V}$  と  $\dot{\tilde{V}}$  の情報は  $r$  と  $u$  の情報に置き換えられた。

(29) と (30) から  $r$  を消去すると  $u$  の動学方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta(1-u)L + \frac{\dot{u}}{u} &= \frac{1}{\theta}(\alpha\delta uL - \rho), \quad \text{namely,} \\ \dot{u} &= \left[ \frac{1}{\theta}(\alpha\delta uL - \rho) - \delta(1-u)L \right] u. \end{aligned} \quad (31)$$

この経済 (簡略化された Romer model) では動学情報は 1 次元に集約される! Solow model でやった時の様な手法 ( $u - \dot{u}$  平面上での分析) が利用可能。

図は Fig.1 で与えられている。図より,  $u$  に関する動学方程式は不安定であり, 完全予見の元で永続的に持続可能な行動は  $u = u^*$  を第一期に選択しそのまま其処に居続けることである。

詰まり以下を帰結として得る。

**Result R-1** 資本無し Romer model に於いては遷移過程は存在せず最初から定常成長状態にある。

このモデルでは遷移動学 transition dynamics は存在しないことが判る。(資本蓄積を持つ Romer (1990) の原論文のモデルとは此処が異なる。) 収斂 (convergence) という性質を分析するには向かないものの, 資本を引っこ抜くことに寄る効用は此処にあって安定性分析の省略が可能となり, また他の要素を入れる余地が広がり, 拡張の可能性を広げたり分析対象を明確化などが可能となる。

## 8 定常状態と動学分析と非成長の罠

定常状態 (31) より定常状態の  $u$  たる  $u^*$  が導出できる。 $u^* \in (0, 1)$  の条件が満たされるもとの  $\dot{u} = 0$  を成立させる  $u$  なので以下を得る：

$$u^* = \frac{\rho + \theta \delta L}{(\alpha + \theta) \delta L} \quad (32)$$

定常状態の労働配分比率が出たところである。これより (14) に  $L_A = (1 - u^*)L$  を代入して定常状態の成長率を得る：

$$(g^* \equiv) \frac{\dot{A}}{A} = \delta(1 - u^*)L = \frac{\alpha \delta L - \rho}{\alpha + \theta} \quad (33)$$

この (33) で与えられた定常状態の経済成長率は Romer (1990) の p.S92 の (13) 式とよく対応している事に注意。

**Result R-2** Romer model に於いては成長率は (33) で与えられて、Romer model の劃期的な点は、此迄長期の成長率  $g$  は外生に与えられて一定 (の技術進歩率) であったものが、分権的なメカニズムで行われる R&D 活動の結果、モデル内の  $\delta, L, \rho, \alpha$  と云ったパラメータによって内生的に技術進歩率  $g$  の値が導出されている。

(32) を  $L_Y = uL$  に注意して (22) に代入：

$$Y^* = \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A \frac{\rho + \theta \delta L}{(\alpha + \theta) \delta} \quad (34)$$

また  $u^*$  を通じて  $g^*$  と  $\tilde{Y} \equiv Y/A$  は以下の様に結びつけられる：

$$g^* = \delta L - \left( \frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{Y}^*.$$

詰まり長期的な成長と瞬時的な生産のトレードオフが存在している。

非成長の罠 no growth traps 成長しないケースを Romer model は分析することが出来る。

$u^* \in (0, 1)$  が実行可能 feasible 条件となる。(32) の形状より  $u^* > 0$  で負にはならないけど  $u^* > 1$  は取り得る。その場合  $u^* = 1$  となり  $g^* = 0$  が均衡 (定常状態にも) となる。

その条件を求めてみる。 $u^* > 1$  より

$$(r^* =) \alpha \delta L < \rho. \quad (35)$$

研究開発の効率性  $\delta$  が小さかったり、人口規模  $L$  が小さかったり、主観的割引率  $\rho$  大きかったりすると発生する。また  $\alpha$  が小さい (労働シェアが大きい) と非成長が発生する可能性が高まる。

## 9 計画経済

計画経済を考える。政府は benevolent で almighty だと仮定する。

従って, (1), (8), (14) の制約のもと (20) を最大化する:

$$\max_{X(i), c, u} \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad s.t. \quad (1), (8), (14).$$

ハミルトン関数は以下の様になる:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_Y \left\{ (uL)^{1-\alpha} \int_0^A X(i)^\alpha di - Lc - \eta \int_0^A X(i) di \right\} \\ & + \lambda_A \delta A(1-u)L. \end{aligned} \quad (36)$$

これを解く。先ず瞬時的な最適化の条件を出す。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X(i)} = \lambda_Y \{ \alpha (uL)^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - \eta \} = 0, \quad (37)$$

(37) より直ちに

$$X(i) = \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} uL. \quad (38)$$

を得る。

これを (36) に代入して

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_Y \left\{ (1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(uL) - Lc \right\} + \lambda_A \delta A(1-u)L. \quad (36)'$$

これを解いて

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\theta} + \lambda_Y(-L) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \lambda_Y \left\{ (1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL \right\} + \lambda_A \delta A(-1)L = 0, \quad (40)$$

$$\rho \lambda_A - \dot{\lambda}_A = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \lambda_Y (1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (uL) + \lambda_A \delta (1-u)L. \quad (41)$$

(38) と (12) を見比べることで分権経済と集権経済の違いが見て取れる。配分  $uL = L_Y$  の違いを別としても独占価格付けで限界費用よりも高い価格が付く分 (12) の係数が  $\alpha^2 (< \alpha)$  となって小さくなっており, 中間財需要が小さくなっていることが判明する。

更に横断面条件 (transversality condition, TVC) として

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) e^{-\rho t} A(t) = 0. \quad (42)$$

を得る。

(38) を (1) に代入して

$$Y = \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(uL) \quad (43)$$

分権と集権の違いは (22) と比較されたし。

(38) より :

$$\lambda_Y (1 - \alpha) \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \lambda_A \delta \quad (44)$$

また (38) に (44) を代入して

$$\rho - \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \delta L \quad (45)$$

(44) に (39) を代入して

$$\frac{c^{-\theta}}{L} \left\{ (1 - \alpha) \left( \frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right\} = \lambda_A. \quad (46)$$

これより  $L$  も定数なので変数は  $c$  と  $\lambda_A$  のみ。よって以下を得る :

$$-\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \theta \frac{\dot{c}}{c}. \quad (47)$$

(47) を (41) に代入すると最適成長経路でのオイラー方程式を得る :

$$\theta \frac{\dot{c}}{c} = \delta L - \rho \quad (48)$$

分権版の Euler 方程式は (21) で与えられるが分権経済での利子率に相当する項が  $\alpha \delta u L$  に対して, 集権経済での利子率の対応物は  $\delta L$  となる。 $u, \alpha \in (0, 1)$  より, 利子率が従って Euler 方程式を通じて成長率が最適より分権経済の場合は必ず低くなる事が判る。

**Result CR-1** Romer model に於いて市場経済の成長率は最適な成長率よりも低い。詰まり分権経済はパレート最適では無い。

(38) を  $cL + \eta X = Y$  に入れると

$$c = \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha)uA, \quad \text{or} \quad C = (1-\alpha)Y \quad (49)$$

後ろの式は (43) 式及び  $C = cL$  から直ちに導くことが出来る。(26) と比較することで分権経済と集権経済の消費性向の違いが解り,  $\alpha \in (0, 1)$  より  $1 - \alpha < 1 - \alpha^2$  であり分権経済の方が現在の消費に対する支出比率が高い。

(49) より

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{u}}{u} + \delta(1-u)L \quad (50)$$

(48) と (50) より経済は (再び)  $u$  の動学方程式に纏められる :

$$\begin{aligned} \rho + \theta \left[ \frac{\dot{u}}{u} + \delta(1-u)L \right] &= \delta L, \quad \text{namely,} \\ \dot{u} &= \left[ \frac{1}{\theta} (\delta L - \rho) - \delta(1-u)L \right] u \end{aligned} \quad (51)$$

対応する分権経済の (31) 式との対比に注目されたい。

最適成長経路の定常状態  $\dot{u} = 0$  と置く集権経済の均衡労働配分を  $u^{**}$  と置くと以下になる :

$$u^{**} = \frac{\rho - (1-\theta)\delta L}{\theta\delta L} \quad (52)$$

横断面条件 (42) は (39) と (40) より  $\lambda_A/\lambda_A = -\theta\dot{c}/c = -\theta\delta(1-u^{**})L$ 。これに (52) を代入して

$$\text{TVC} \Leftrightarrow (1-\theta)\delta L \leq \rho \Leftrightarrow \frac{1}{\theta}(\delta L - \rho) - \delta L \leq 0 \quad (53)$$

集権経済に於いても常に定常成長が保証される訳では無い。  $u^{**} \in (0, 1)$  が必要で,  $u^{**} < 1$  から  $\delta L > \rho$  が導かれ,  $u^{**} > 0$  に関しては,  $\theta \geq 1$  の時, 常に成立,  $\theta < 1$  の時,  $\delta L > \frac{\rho}{1-\theta} (> \rho)$  が必要となるがこれは (53) より横断面条件で常に満たされている必要がある。

$$\delta L > \rho \quad (54)$$

分権経済の条件は (35) で与えられている。  $\delta L$  が大きい事が必要だという性質は共通するが,  $\frac{1}{\alpha}\rho > \delta L > \rho$  が満たされてる場合は分権経済に於いては非成長だが集権経済のケースでは定常成長が可能となる。

**Result CR-2** 分権経済では経済成長出来ないが，集権経済にする事で

(32) と (52) の比較が分権と集権の差。  $1 > \alpha$  より集権経済の均衡  $u$  の分母が大きくなっているので集権の方 (最適成長のケース) が生産が小さくまた成長率は高くなる。

(51) と (53) より，矢張り分権時と同様に，式の  $u$  切片が負で，傾きが正という性質が同じであり， $u$  の動学方程式は不安定であり最初から均衡点  $u^{**}$  に留まり続けるのが最適となる。

**Result CR-3** 簡略化された Romer model では集権経済 (計画経済) でも遷移動学は存在せず，常に一定の配分で R&D に労働を配分し続け，一定の成長率で経済成長を続けるのが最適な定常状態 (成長経路) となる。

また (14) と (52) より，

$$g^{**} = \frac{1}{\theta}(\delta L - \rho) (> g^*). \quad (55)$$

Romer (1990) の p.S97 の (14) 式に於いて  $H$  と  $L$  の区別が無いので  $L = H, \beta = 0$  と置くと完全に対応している事に注意されたい。

以下で分権経済と集権経済の違いを 2, 3 確認する。  $g^{**} > g^*$  は  $\Gamma(a) \in (0, 1)$  より分母は  $g^*$  がより大きく分子は  $g^*$  がより小さいから明らかである。このこと及び  $g = \delta(1 - u)L$  から以下を得る：

$$u^* > u^{**}. \quad (56)$$

$g^{**} > g^*$  より十分時間が経てば  $c(t)^{**} > c(t)^*$  は明らかである。今，同じ技術水準に対する分権と集権の消費の大小を考える。(26) と (49) より

$$\frac{\tilde{c}^*}{\tilde{c}^{**}} = (1 + \alpha)\alpha \frac{u^*}{u^{**}} \quad (57)$$

此処で  $\tilde{c} \equiv c/A$  である。(56) より  $u^*/u^{**} > 1$  なので  $\alpha(1 + \alpha) > 1$  即ち  $\alpha > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618..$  の時，必ず  $\frac{\tilde{c}^*}{\tilde{c}^{**}} > 1$  であるが，良く用いられる，生産に於ける労働分配シェア  $2/3$  に対応する  $\alpha = 0.33..$  に於いては大きさは ambiguous である。

## 10 補助金政策の効果

Romer model の implication の一つは R&D 活動を明示することで R&D と長期の成長率の関係を明らかにした事であるが，分権経済と集権経済の結果を比較することでその乖離とも明らかにした。独占価格付けを含む特許の存在は市場を歪め，分権経済の均衡はパレート最適ではない為に政策介入による

経済厚生向上が可能となるのである。詰まり、Romer (1990) は政策介入の一つの有効性のフレームワークを提示したことになる。

それはケインズの様なマクロ的な総需要管理政策や金融緩和とは全く違ったマイクロファンデーションを伴った産業政策、イノベーション刺戟策なのである。

この簡略化された Romer model で唯一の資源配分は労働力の生産と R&D に於ける配分であり、その比率を示す  $u$  を政策で変化させて最適なものに変化させる事が目標となる。

そしてその政策手段として R&D に対する補助金 (subsidies) が考えられ、それは収入に対する補助金と費用 (支出) に対する補助金があり得る。

一つ目は収入を増やす補助金である。R&D の収入は独占価格付けで売上を確保する中間財部門に対して行われる。(9) 式で与えられる  $p(i)X(i)$  に対して補助金  $s^M$  を出して、若しくは中間財原料価格に補助金  $s^Y$  を出して価格を引き下げ、中間財需要を喚起することにする。

$$\Pi(i; \mathbf{s})^M = (1 + s^M)p(i)X(i) - (1 - s^Y)\eta X(i) \quad (58)$$

この結果、

$$X(i; \mathbf{s}) = \left( \frac{(1 + s^M)\alpha^2}{(1 - s^Y)\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \quad (59)$$

$$p(i; \mathbf{s}) = \frac{(1 - s^Y)\eta}{(1 + s^M)\alpha}. \quad (60)$$

となる。

一方で R&D に対する補助金は (15) 式に対して行われる。

$$\pi(j; \mathbf{s})^R = \dot{A}\tilde{V} \frac{L_A(j)}{L_A} - (1 - s^L)wL \quad (61)$$

これより (27) に対応する

$$\delta AL_A \tilde{V} = (1 - s^L)wL_A \quad (62)$$

(59) を (1) に代入。

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{s}) &= L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \left\{ \left( \frac{(1 + s^M)\alpha^2}{(1 - s^Y)\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \right\}^\alpha di \\ &= \left( \frac{(1 + s^M)\alpha^2}{(1 - s^Y)\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL_Y \end{aligned} \quad (63)$$

補助金政策前の (22) に対応

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}(s)^M &= \left( \frac{1}{(1+s^M)\alpha} - 1 \right) (1-s^Y)\eta \left( \frac{(1+s^M)\alpha^2}{(1-s^Y)\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \\
&= \{1 - (1+s^M)\alpha\} (1+s^M)\alpha \left( \frac{(1+s^M)\alpha^2}{(1-s^Y)\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L_Y \\
&= \{1 - (1+s^M)\alpha\} (1+s^M)\alpha \frac{Y}{A}
\end{aligned} \tag{64}$$

$\tilde{V}$  に関しては (14), (18), (23), (63) を (62) に代入 :

$$\tilde{V} = \frac{(1-s^L)(1-\alpha)}{\delta} \left( \frac{(1+s^M)\alpha^2}{(1-s^Y)\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{65}$$

定常状態では  $\dot{\tilde{V}} = 0$ 。これと (64) と (65) を (28) に代入して

$$r(s) = \frac{\tilde{\Pi}(s)}{\tilde{V}(s)} = \frac{\{1 - (1+s^M)\alpha\} (1+s^M)\alpha}{(1-s^L)(1-\alpha)} \delta L \tag{66}$$

この  $r(s) = \delta L$  (最適成長での利子率に相当) となるように  $s^L$  と  $s^M$  を決めれば成長率に関して最適性を実現出来る。

## 11 労働分配率

本質的には Cobb-Douglas 型の Romer model であるので分配率は一定である。

$$s_{LY} = \frac{wL_Y}{Y} = 1 - \alpha \tag{67}$$

$$s_X = \frac{X}{Y} = \alpha^2 \tag{68}$$

$$s_{\Pi} = \frac{\Pi}{Y} = (1-\alpha)\alpha \tag{69}$$

$Y$  で測られる Output が最終財部門の労働, 中間投入財, 独占利潤に分配されているのが解るが, 中間投入財は GDP に計上されない。対して, 此処での  $Y$  は中間投入財も含んでいる。正確には  $C = (1-\alpha^2)Y$  が最終財生産による GDP となる。

更にはこの経済では新製品が開発されていて知的財産生産物が存在する。

$$\Upsilon = (1-\alpha^2)Y + \dot{A}\tilde{V} = (1-\alpha)Y + \frac{\delta AL_A}{\Omega} \frac{w\Omega}{\delta A} \tag{70}$$

$$= (1-\alpha) \left( 1 + \alpha + \frac{1-u}{u} \right) Y \tag{71}$$

この場合 ,

$$S_L := \frac{wL}{\Upsilon} = \frac{1}{1 + \alpha u} (\in (0, 1)) \quad (72)$$

となる。  $u = u^*$  を代入すると  $(1 - u^*)/u^* = (\alpha\delta L - \rho)/(\theta\delta L + \rho)$  より

$$\Upsilon = (1 - \alpha) \{1 + \alpha(1 - u^*)\} \left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL \quad (73)$$

を得る。

この時 (独占) 利潤分配率が資本分配率 (正確には資産分配率?) になるので  $S_K$  を定義すると

$$S_K = \frac{\Pi}{\Upsilon} = \frac{rV}{\Upsilon} = \frac{\alpha u^*}{1 + \alpha u^*} \quad (74)$$

となる。  $S_K + S_L = 1$  となっている。

## References

- [1] Arnold, L. G. (1998) "Growth, welfare, and trade in an integrated model of human-capital accumulation and research," *Journal of Macroeconomics* Volume 20, Issue 1, Pages 81-105
- [2] Barro, R. J., & X. Sala-i-Martin (2003) *Economic Growth* 2nd Edition, MIT Press
- [3] Benhabib, J., R. Perli, and D. Xie. (1994) "Monopolistic competition, indeterminacy and growth" *Ricerche Economiche* 48, 279-298.
- [4] Jones (1995) "R&D-based model of Economic Growth" *Journal of Political Economy* Vol.103 No.4 759-784.
- [5] Romer, D., (2011) *Advanced Macroeconomics* The McGraw-hill Series in Economics.
- [6] Romer, Paul M., (1990) "Endogenous Technological Change" *Journal of Political Economy* Volume 98, Number 5, Part 2 pp. S71-S102
- [7] 岩井 克人 (1994) 「経済成長」 岩井克人・伊藤元重編 『現代の経済理論』 所収 東大出版会

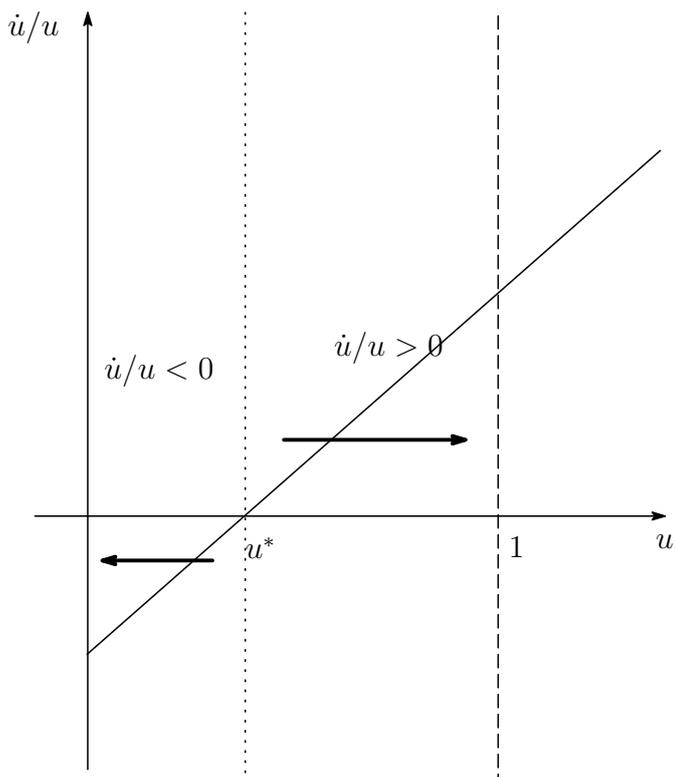


Figure 1: Dynamics of  $u$