CES型及びCobb-Douglas型総生産函数と技術進歩の中立性と労働分配率の低下

Shiro KUWAHARA

February 28, 2025

近年，労働分配率の低下が指摘されて居て，カルドアの定型化された事実 (Kaldor 1957) 以来のマクロ経済学の大前提が動揺していると注目を浴びている (例えばSchwellnus, Pak, Pionnier & Crivellaro 2018)。(但し日本に関しては企業の収益力に問題で労働分配率が高めに出ている？)

本稿では分配率が可変的なCES型とCD型の総生産函数を用いて技術進歩の中立性の議論を概観し，その後労働分配率の低下の要因を確認した後に，Ramsey modelに適用してその機能を確認してみる。

1　総生産函数と代替の弾力性

資本と労働の代替の弾力性が一定であるCES型の生産函数を仮定 (Solow 1956, Arrow, Chenery, Minhas, and Solow 1961)。全体の生産性を上げる T，労働生産性を上げる A，資本生産性を上げる B の３種類の技術進歩を導入する：

$$Y = T\left\{(1-\alpha)(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \alpha(BK)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

此処で σ が労働と資本の代替の弾力性 (elasticity of substitution) で以下で定義される (どれでも同じ)：

$$\sigma := \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\frac{\Delta k}{k}}{\frac{\Delta\omega}{\omega}} = \frac{dk}{d\omega}\frac{\omega}{k} \tag{2}$$

$$= -\frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{d(r/w)}{(r/w)}} = \frac{dlogk}{dlog\omega} \tag{3}$$

此処で $k := \frac{K}{L}$，$\omega := \frac{w}{r}$。K/L と r/w で定義する場合は – を付ける必要がある。 また最も代表的な代替の弾力性のせいか労働と資本を省いて単に代替の弾力性と称してこの数値を指すこともある。

$\sigma \to 1$ の時，(1) はコブダグラス型になり，$\sigma \to 0$ の時，レオンチェフ型 $(Y = \min[aK, (1-a)L])$ に，$\sigma \to \infty$ の時に L と K に関して加法の生産函数 $(Y = aK + (1-a)L)$ となる。

企業の利潤最大化から r と w を導出する：

$$w = (1-\alpha)T^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} Y^{\frac{1}{\sigma}} A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} L^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{4}$$

$$r = \alpha T^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} Y^{\frac{1}{\sigma}} B^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} K^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{5}$$

従って

$$\omega = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} k^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \text{namely}, \quad k(\omega) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \omega^{\sigma} \tag{6}$$

であるから，確かに上の定義が成立する。

1.1 技術革新の中立性

1.1.1 ヒックス中立性

宇沢 (1990 12 章) によると静学的な状況に使われるのが Hicks 中立性 (Hicks 1932) で，資本・労働比率 (k) が一定の時，生産函数 $F(K, L, t)$ のシフトに寄って表される資本の限界生産と労働の限界生産の比率が変わらない時とのことである。毎度のことであるが，規模に関する収穫一定が成立する場合，完全競争下で以下が成立する。

$$r = f_1(k, t), \quad w = f(k, t) - kf_1(k, t) \tag{7}$$

今，$k = \bar{k}$ で

$$\frac{f(k, t) - kf_1(k, t)}{f_1(k, t)} = (const) \quad \text{for } \forall t \tag{8}$$

である。例えば CD 型生産函数 (Cobb & Douglas 1928) を以下の様に仮定する：

$$Y = T(BK)^a (AL)^{1-a}, \quad \text{一人当たりで表現して} \quad y = TB^a \bar{k}^a A(t)^{1-a} \tag{9}$$

に対して

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-a)TB^a \bar{k}^a A(t)^{1-a}}{aTB^a \bar{k}^{a-1} A(t)^{1-a}} = \frac{a}{1-a}\bar{k}^{-1} = (const) \tag{10}$$

であるので，よく知られた事実ではあるが CD 型生産函数はヒックス中立で (も) ある。

基本的に $F(K,L,t)=\tilde{A}(t)G(K,L)$ の形に分離可能な場合はヒックス中立となる。上の例だと $T(t)B(t)^a A(t)^{1-a}=\tilde{A}(t)$ と云う訳である。T，A，B のどの形でもヒックス中立。

CES に関しても (1)，(4) 及び (5) より以下の形を得る：

$$\frac{w}{r}=\frac{a}{1-a}k^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \tag{11}$$

$A(t)/B(t)=(const)$ となる時に $g_A=g_B=0$ の時は $\tilde{A}=TA=TB$ として $Y=\tilde{A}\left\{(1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ の形に変形できる。CES がヒックス中立であるためには T の形が必要である。

1.1.2 ハロッド中立性

宇沢 (1990 12 章) によると動学的な状況に使われるのが Harrod 中立性で，利子率 (r) が一定の時，生産函数 $F(K,L,t)$ のシフト (技術革新) が起きても資本係数 (or 資本産出比率 k/y) の変わらない時とのことである (Harrod 1937)。Ramsey 型の動学モデルでは長期の定常状態で r が一定である必要があることに対応しているものと思われる。今，$r=\bar{r}$ で $r=f_k(k,t)$ に対して

$$\frac{k}{y(k)}=(const) \tag{12}$$

である。例えば (9) で計算する。$\bar{r}=aTK^{a-1}\{AL\}^{1-a}B^a=(const)$ である。また

$$\frac{K}{Y}=\frac{K}{T(BK)^\alpha(AL)^{1-\alpha}}=\frac{a}{\bar{r}} \tag{13}$$

となってこの性質は CD 型生産函数は T, A, B のどの形の技術進歩であってもハロッド中立でもある事を示している。

一般的に $F(K,L,t)=F(K,A(t)L)$ の形に変形可能な場合はハロッド中立となる。

CES に関しても (1) の元で考えて見る。$\bar{r}$ 及び (5) より

$$g_Y=g_K+(1-\sigma)(g_B+g_T), \tag{14}$$

が成立する。ここで $g_Z=\dot{Z}/Z$ で成長率を表す。$K/Y=(const)$ 詰まり $g_Y=g_K$ のもとで $g_T=-g_B$ が必要となる。適当に単位を取って $B=T^{-1}$ とすると

$$r=a\left\{(1-a)\left(\frac{AL}{BK}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+a\right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{15}$$

となり，これが定数である必要がある。詰まり $g_T = g_B$ 且つ $(AL)/(BK) = (const)$ が成立する必要がある。

$T = B$ の時，(1) より K/Y は

$$\frac{Y}{K} = \left\{(1-a)\left(\frac{AL}{BK}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{16}$$

となって $(AL)/(BK) = (const)$ のもとでこれは確かに定数である。この時 $\tilde{A} = A/B$ と取ることで (1) は

$$Y = \left\{(1-a)\big(\tilde{A}L\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + aK^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{17}$$

の形となる。

CD 型生産函数が基本的にハロッド中立且つヒックス中立だったのに対して CES はそうではない。技術進歩として許されるのは本質的には A の箇所の上昇のみである。(B や T に関しては A との関係で制約がつく。) 例えば資本増大的な技術進歩 B と整合的なハロッド中立的な生産函数は総生産性 T が B の上昇とともにそれと同じだけ低下する必要がある：

$$Y = B^{-1}\left\{(1-a)\big(AL\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a\big(BK\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{18}$$

現在の技術進歩が資本増大的な技術進歩だとすると，Akcigit (2024) の”innovation paradox”の指摘はこの部分から来るのだという様な設定が可能？因みに Accemoglu (2025) は $Y = (1-a)K^a L^{1-a}$ という形の生産函数を想定して労働分配率の低下 (即ち $1-a$ の低下) が総生産性 $(1-a)$ の低下を導くとして議論している。T が低下する (18) 式のような形もそれ程不自然ではなくなるのかもしれない。

1.1.3 ソロー中立

労働生産性 Y/L が一定である成長経路上で、賃金率 w が不変であるとき，技術進歩はソロー中立的であると云う。ソロー中立はヒックス中立やハロッド中立に比べてマイナーであり，宇沢 (1990 12 章) でも D.Romer (2006) でも触れられていない。岩井 (1995) や Accemoglu(2009) には載っている。どこかでこれをカルドア中立を呼んでいたけどどこで見たのか失念した。また，y 一定の経路上で労働生産性 Y/L が一定である成長経路上で w が上昇 (下落) するならば、労働増大的 (資本増大的) である。

CD で考えて見る。

$$\bar{y} = \frac{Y}{L} = T\left(\frac{BK}{AL}\right)^{\alpha} A = (const) \tag{19}$$

この時労賃 w は

$$w = (1-\alpha)T(BK)^{\alpha}A^{1-\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y}{L} = (1-\alpha)\bar{y} = (const) \tag{20}$$

CD はソロー中立である。但し $Y/L = \bar{y} = (const)$ である為には $g_Y = g_L = n$ である必要があって，この時 $g_K = n - \frac{(1-\alpha)g_A + \alpha g_B + g_T}{\alpha}$ が必要となる。$\dot{K} = Y - C(-\delta K)$ をすると，定常状態では $g_K = g_Y = g_C$ が必要であり，今 $g_Y = n$ より $g_K = n$ とすると結局 $-g_T = (1-\alpha)g_A + g_B$ が必要となる？

一般的には $Y = F(BK, L)$ の形をする必要がある。CES で確認して見る。

$$\bar{y} = \frac{Y}{L} = T\left\{(1-a)A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a\left(\frac{BK}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = (const) \tag{21}$$

このもとで w を計算すると

$$w = (1-\alpha)T\left\{(1-a)A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a\left(\frac{BK}{L}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right\}^{\frac{1}{\sigma-1}} A \tag{22}$$

$$= (1-\alpha)AT^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\bar{y}^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{23}$$

詰まり CES に於いて Solow neutral の為には $g_A = g_T = 0$ が必要。この条件の下で CES に於いては y が一定のためには BK/L が一定となる必要がある。

CD 型はソロー中立且つヒックス中立且つハロッド中立であるので資本増大型技術進歩を解釈して解くことも可能。通常のソローモデルに対して $A = B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ と置けば良い。定常状態の成長率は $g^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}g_B + n$ として解けることになる。

CES の場合は次節参照のこと。

1.2 分配率

この時，労働の分配率は

$$s_L := \frac{wL}{Y} = \gamma Y^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{24}$$

$$= \frac{(1-\alpha)A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(1-\alpha)(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \alpha(BK)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\tilde{k}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \tag{26}$$

where $\tilde{k} := \frac{BK}{AL}$. (26) に於いて α の上昇でも s_L が低下するが，これはコブ・ダグラス型 $(Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha})$ に於いて α が上昇する状況に対応する。

$$\frac{ds_L}{d\tilde{k}} = \frac{\alpha(1-\sigma)}{(1-\alpha)\sigma\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\tilde{k}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^2}\tilde{k}^{-\frac{1}{\sigma}}\left\{\begin{array}{c} > \\ < \end{array}\right\}0. \quad \text{for} \quad \sigma\left\{\begin{array}{c} < \\ > \end{array}\right\}1 \tag{27}$$

$\tilde{k}$ の変化による分配率の変化は代替の弾力性が 1 より大きいか小さいかに依存する。

以下，三好 (2018) に拠る。ここで実際の代替の弾力性は $\sigma < 1$ が多い。海外の研究では Antras (2004) や Lawrence(2015) などがあり，日本でも、須合・西崎（2002）などが 1 以下を報告している。。

資本財価格の低下による K 需要の増加ということの様だが，$\sigma < 1$ 且つ資本財価格の低下の下で労働分配率が低下するのはパズルということで幾つか研究がすすめられた .

ただ $\tilde{k}$ もモデル内で値が決まる内生変数であり ad hoc に変化させられる訳ではない。

2 CES 型総生産函数と定常状態

ここでは Ramsey model の総生産函数を CES にして定常状態の $\tilde{k}$ の決定を求めてみる。$\tilde{k}$ に加えて $\tilde{y} := Y/(AL)$ で定義する。(4)，(5) より

$$\tilde{y} = \left(1-a+a\tilde{k}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{28}$$

$$w = (1-a)A\tilde{y}^{\frac{1}{\sigma}} = (1-a)A\left(1-a+a\tilde{k}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{29}$$

$$r = aB\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} = aB\left((1-a)\tilde{k}^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}+a\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{30}$$

Y の成長率を導出してみる。

$$\log Y = \frac{\sigma}{\sigma-1}\log\left[(1-a)(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+a(BL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right] \tag{31}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{(1-a)\frac{\sigma-1}{\sigma}(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right)+a\frac{\sigma-1}{\sigma}(BK)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(\frac{\dot{B}}{B}+\frac{\dot{K}}{K}\right)}{Y^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \tag{32}$$

$$= (1-a)\left(\frac{Y}{AL}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}(g_A+n)+a\left(\frac{Y}{BK}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\left(g_B+\frac{\dot{K}}{K}\right) \tag{33}$$

ここで

$$\left(\frac{Y}{AL}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = 1 - a + a\tilde{k}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \frac{1-\alpha}{s_L} \tag{34}$$

$$\left(\frac{Y}{BK}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = (1-a)\tilde{k}^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a = \frac{a}{s_K} \tag{35}$$

より

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_L(g_A + n) + s_K\left(g_B + \frac{\dot{K}}{K}\right). \tag{36}$$

定常状態では最終財の資源制約 $\dot{K} = Y - C(-\delta K)$ より $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{C}}{C} := g^*$ が必要となる。これを (36) に代入して

$$g^* = \frac{1}{1 - s_K(\tilde{k})}\left\{s_L(\tilde{k})(g_A + n) + s_K(\tilde{k})g_B\right\} \tag{37}$$

$$= g_A + n + \frac{s_K}{s_L}g_B \tag{38}$$

ここで二行目から三行目には $1 = s_K + s_L$ を利用している。

一方貯蓄率を s として最終財の資源制約と CES の特定化より

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\left[(1-\alpha)\left(\frac{AL}{BK}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \alpha\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} - \delta \tag{39}$$

を得る。定常状態の為には $(AL)/(BK) = (const)$ つまり $g_K = n + g_A - g_B$ が必要。この条件を (38) に代入すると

$$-g_B = \frac{s_K}{s_L}g_B \tag{40}$$

を得る。即ち $g_B = 0$ が定常状態の為に必要となる (Uzawa 1961, Schlicht 2006, Scrimgeour 2008, Grossman et. al 2017)。以下では $B = (const)$ を仮定する。

最終財の資源制約 $C = Y - \dot{K}$ より

$$\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - (n + g_A)\tilde{k}^* \tag{41}$$

更にオイラー方程式と定常状態での一人当たり成長率 $g_c^* = g^* - n = g_A$ より

$$\rho + \theta g_A = r - n = aB\big((1-a)\tilde{k}^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} + a\big)^{\frac{1}{\sigma-1}} - n \tag{42}$$

CES は稲田条件の一つが満たされない。したがって定常状態が存在するためには

$$\lim_{\tilde{k}\to\infty} aB\big((1-a)\tilde{k}^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}+a\big)^{\frac{1}{\sigma-1}} < n+\rho+\theta g_A, \quad \text{namely} \quad a^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}B < n+\rho+\theta g_A \tag{43}$$

(43) が満たされてると仮定して (42) より

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{\left(\frac{aB}{n+\rho+\theta g_A}\right)^{1-\sigma} - a}{1-a}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \tag{44}$$

労働分配率の低下をもたらす $\tilde{k}$ の低下は B の下落，n の上昇，ρ の上昇，θ の上昇，g_A の上昇等がある。

Karabarbounis & Neiman (2014) の指摘したような資本財価格の低下が資本効率の低下が限界生産性が落ちたものだとすると B の下落はあり？また IT 化が g_A の上昇をもたらしたとするとこれもあり得るか。一方で n の上昇は日本に限らず世界的には発生していない (但しここの一国モデルを新製品の販路とみると国に限らず大きな世界市場と解釈することが出来て市場経済化で世界市場に組み込まれている人口の増加率だと思うと n 増加と解釈可能？)。

References

[1] Accemoglu, Daron (2009) *Introduction to Modern Economic Growth* Princeton Univ. Press

[2] Accemoglu, Daron. (2025) ”2023 Klein Lecture - Capital and Wages” *International Economic Review* Vol.66(1), pp.3-24.

[3] Akcigit, Ufuk. (2024) ”The Innovation Paradox” *Finance & Development*, IMF

[4] Antras, Pol. (2004): ”Is the US aggregate production function Cobb-Douglas? New estimates of the elasticity of substitution,” *Contributions to Macroeconomics*, 4(1), 1-34.

[5] Arrow, K. J.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S.; Solow, R. M. (1961). ”Capital-labor substitution and economic efficiency”. *Review of Economics and Statistics* 43 (3): 225-250.

[6] Chirinko, R. S., and D. Mall Lawrence, Robert Z. (2015)" Recent Declines in Labor 's Share in US Income : A Preliminary Neoclassical Account, "NBER WORKING PAPER SERIES 21296

[7] Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928). "A Theory of Production". *American Economic Review* 18 (Supplement): 139-165.

[8] Grossman et. al (2017) "Balanced Growth Despite Uzawa" *American Economic Review* 107(4): 1293-1312.

[9] Jones, C., D. Scrimgeour (2008) "A New Proof of Uzawa's Steady-State Growth Theorem," *Review of Economics and Statistics* 90(1): 180-182.

[10] Kaldor, N. (1957): A Model of Economic Growth, The Economic Journal, 67(268), 591-624.

[11] Karabarbounis, L. and B. Neiman (2014)" The Global Decline of the Labor Share, " *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 129, No. 1, pp. 61-103.

[12] Lawrence, Robert Z. (2015) " Recent Declines in Labor 's Share in US Income : A Preliminary Neoclassical Account, "NBER WORKING PAPER SERIES 21296

[13] Oberfield, E., and D. Raval (2021): " Micro data and macro technology, " *Econometrica*, 89, 703-732.

[14] Romer, David (2006) *Advanced Macroeconomis*, 3rd edition McGrow-Hill Co. Inc.

[15] Schlicht, Ekkehart (2006) "A Variant of Uzawa's Theorem" *Economic Bulletin* 6:1-5.

[16] Schwellnus, C., M.Pak, P. Pionnier and E. Crivellaro (2018)" Labour share developments over the past two decades: The role of technological progress, globalisation and " winner-takes most " dynamics " OECD Economics Department Working Papers, No. 1503

[17] Solow, R.M (1956). "A contribution to the theory of economic growth". *The Quarterly Journal of Economics* 70 (1): 65-94.

[18] Uzawa, H. (1961) "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium," *Review of Economic Studies*, 28, 117-124

[19] 岩井克人 (1995) 「経済成長論」,『現代の経済理論』岩井克人・伊藤元重編 東京大学出版会

[20] 須合智広・西崎健司（2002）「わが国における労働分配率についての一考察」,『金融研究』, 第１巻, 125-170 頁.

[21] 三好 向洋 (2018) ”労働分配率の低下に関するサーベイ” 『ファイナンス』