経済数学

Shiro KUWAHARA

20.5.25

1　函数と微分

1.1　解析学とは

誤解を恐れず簡単に云ってしまえば，現実の曲がったものを真っ直ぐにして簡単に理解しようとする試み。因みに大学数学のもう一つの柱である線型代数はその真っ直ぐなものを纏めて取り扱う試みである。これは三土 (1991) にあった表現を更に簡略化したものである。三土 (1991) は入門書としても非常に優れているので参考にして欲しい。

曲線 $y = f(x)$ を $y = f(x)$ 上の点 $(x^*, f(x^*))$ の接線を求めると云うのが微分の最初に出てくる試み $(y - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*)$ がその接線) であるが，まさに曲線を直線にして理解しようとしているのである。

但し，大学の数学は本来ヨリ厳密なものである。実数の性質から入ってきっちりとした体系を持っている。入門が終わったら是非，高木 (1983) 辺りに挑戦してみて欲しい。哲学書は解らないなりに若い内にうんうん云いながら読むと良いと聞いたことがある。数学の深遠な世界も解らないなりにいきなり挑戦してみるのも悪くはないであろう。本稿は，遺憾ながら，経済学に有用な部分の数学の摘まみ喰いではないかとの誹りを否定出来るものではない。

1.2　何故函数か

そもそもなんで函数なのか？我々が知りたい現象，関心ある対象が，input を x，output を y とする時に，$y = x^2$ であって $x = y^2$ でないのは何故か？

我々は因果関係を知りたい。x を抛り込んだ時に出てくる y の仕組みを知りたいのである。そして函数型が解れば $y = x^2$ がその仕組みであると理解出来る。$x = y^2$ は $y =$ の形に変形すると $y = \pm\sqrt{x}$ である。x を抛り込むと出てくる値がある時は $-\sqrt{x}$ となりまた或る時は $+\sqrt{x}$ が出てくるなら，この函数型では表現出来ない何かの $+$ か $-$ を決める要素が隠れている可能性があるから仕組みの理解としては不十分なのである。

1.3　傾きとは何か

我々は今，x の変化が y の変化を引き起こす事象を解明したいと思っている。

x 方向にいくつか進む (進んだ数量は差分演算子 Δ を用いて Δx と書ける)，この時の y も一般に変化する (その時の変化量を Δy と書く。)

先ず知りたいのは x が増えた (減った) 時に y は増えるのか減るのかである (経済的な現象では予想が付いていることが多いが‥)。x が増えた時に y が増えると x が減った時に y が減るのは同じ効果と見なせる。逆は逆である (x が増えた時に y が減ると x が減った時に Y が増えるは同一視出来る)。例えばグラフに於いて x_1 から x_2 への変化と x_2 から x_1 への変化に対応する。増加をプラス，減少をマイナスだとするとこれらを統一的に把握するには比を考えれば良い。例えば x が増えた時に y が増えると x が減った時に y が減るのどちらも $\Delta y/\Delta x$ を考えると $\Delta y/\Delta x > 0$ である。この変化の比が要するに"傾き"なのである。

直線のグラフで云うとその水平線に対する角度に対応する。角度が一定であるということは図る箇所 (とる Δx の場所) に依存しないということであり，直線の傾きは一定であるということに対応している。

傾きは変化率とも表現出来る。直線では一定であるが一般に曲線では変化率は変化するので (その区間の) 平均変化率とも云える。

変化率が一定の直線では問題にならないが，変化率が場所によって段々と変化していく曲線では問題になる。そこで１点での変化率を求めたい，となる。２点の取り方から自由になるメリットは大きい。これが微分である。

$$\text{微分の定義}: \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

１点での傾きが定義可能なのは２点を限りなく近づけた時に詰まり Δx を限りなく 0 に小さくした時に，どんな近づけ方でも一定の値に収束する場合。

最も単純な $y = f(x) = x^a$ $(a \in N)$ の微分。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} \tag{2}$$

$(x+h)^a$ は二項定理を使うと $(x+h)^a = \sum_{r=0}^{a} {}_n\mathrm{C}_r x^{a-r} h^r$ と書けるので

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{r=0}^{a} {}_n\mathrm{C}_r x^{a-r-1} h^r - x^a h^{-1} \tag{3}$$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 x^a h^{-1} + {}_n\mathrm{C}_1 x^{a-1} h^0 + \left\{ \sum_{r=2}^{a} {}_n\mathrm{C}_r x^{a-r-1} h^r \right\}_{\Longrightarrow 0} - x^a h^{-1}. \tag{4}$$

ここで ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ であるから ${}_n\mathrm{C}_0 x^a h^{-1}$ と $-x^a h^{-1}$ はキャンセルアウトして 0。結局 ${}_n\mathrm{C}_1 x^{a-1} h^0$ の項のみが残る。${}_a\mathrm{C}_1 = a$ で $h^0 \to 1$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = ax^{a-1} \tag{5}$$

を得る。

例題　$y = f(x) = x^2$ や $y = g(x) = x^3$ に関して上式が成立することを確かめよ。

　この傾きを微分係数とも云う。先程の変化率の正負の符号と同じ意味をこの微分して出てくる式，導函数という，の値が持っているので，微分して導函数を導出する事で，数値 x に於ける y の変化 (増えるのか減るのか) という定性的な性質を１本の式で表現する事ができてとても取扱い易く便利である。

　更に曲線の或る点での (　２点ではなくその瞬間的な１点での) 傾きを示しているのである。この傾きの大きさは，その x の変化の y の変化に与える大きさを示している為，影響を定量的に測ることも出来て便利である。経済学的には特に弾力性という値を用いることが多い。

弾力性　(略)

生産函数　(略)

2　様々な微分公式

高校の文系数学の範囲で出てきた微分公式は以下の通り。以下，証明略で列記して行く。

Ⅰ 定数倍の微分　$\{kf(x)\}' = kf'(x)$
Ⅱ 和の微分　$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

　高校の理系数学の範囲で出てきた微分公式を順に追っていく。

Ⅲ 積の微分　$\{g(x)f(x)\}' = g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$

例題　以下の式を微分せよ。

$$y = (x^3 + 2x)(2x^2 - 1)$$

(略解) 上の公式 ⅢⅠ を適応すると $g(x) = x^3 + 2x$，$f(x) = 2x^2 - 1$ となり，その導函数はそれぞれ $g'(x) = 3x^2 + 2$，$f(x) = 4x$ となる。これらを組み合わせれば

$$y' = (3x^2 + 2)(2x^2 - 1) + (x^3 + 2x)(4x) = 10x^4 + 9x^2 - 2$$

を得る。■

$$\text{Ⅳ 商の微分 (1)} \quad \left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$\text{Ⅴ 商の微分 (2)} \quad \left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$$

商の微分 (2) に於いて $g(x) = 1$ とすれば商の微分 (1) が得られることに注意。

例題　以下の式を微分せよ。

$$y = \frac{x^3 + 2x}{2x^2 - 1}$$

(略解) 上の公式 Ⅴ を適応すると

$$y' = \frac{(3x^2 + 2)(2x^2 - 1) - (x^3 + 2x)(4x)}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 7x^2 - 2}{(2x^2 - 1)^2}$$

を得る。■

$y = f(z)$，$z = g(x)$ とする。この時，

$$\text{Ⅵ 合成函数の微分} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

となる。別の表記法では $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ とも書ける。

例題　商の微分 (1) を $y = g(z) = \frac{1}{z}$，$z = f(x)$ と置いて合成函数の微分の公式より直ちに導出出来ることを示せ。

(証明略)

$$\text{Ⅶ 逆函数の微分} \quad \left\{\frac{dy}{dx}\right\}' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

或る函数 $y = f(x)$ を x に就いて解けて $x = f^{-1}(y)$ の形に出来 ()，且つこの式から x と y を入れ換えた $y = f^{-1}(x)$ が函数である時，$f^{-1}(\cdot)$ を函数

$f(\cdot)$ の逆函数であると云い，エフインバース等と呼ぶ。インバース inverse とは逆 (の) という意味であり，例えば実数 a の逆数 (逆数も inverse である) を $\frac{1}{a} = a^{-1}$ と書くのと相似的である。(逆行列なんかも A^{-1} と書く。)

注意したいのは $x = f^{-1}(y)$ と $y = f^{-1}(x)$ の区別である。例えば $y = f(x) = 2x + 1$ は

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \tag{6}$$

と変形出来て同じ直線を指し，$y = f(x) = x^2$ の 45 度線を対称軸とする逆函数は変数を入れ換えた

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \tag{7}$$

で示される。逆函数がイマイチわからないと云う向きはこの単純な１次函数のグラフでも実際に書いてみて違いを確認・体感されたし。

3　利子率とネイピア数

高校数学で出てくるが理系の範囲でありながら文系が多数の経済学部と関係の深いテーマにネイピア数がある。津田 (1990) や Silberberg & Suen (2001) など導入部にこの話しを持ってきているテキストもある。

3.1　長期的な話し

元本 100 万円を年利 3 % (超低金利時代に可成りの利回りである。。) で１年間運用する資産運用を考える。直感的に明らかだと思うが，１年後に 103 万円を貰えることになる。

これを式に直すと

$$１年後の資産 = 100 万円 * (1 + 0.03) = 103 万円$$

である。

２年後はどうなるかを考える。複利 (利子にも利子がつく) の場合，この 103 万円が次の１年の元本となり，結局

$$２年後の資産 = 103 万円 * (1 + 0.03) = 103 万円 * (1 + 0.03)^2 = 106 万 9 百円$$

となる。

これを纏めると元本 A_0 円の年利 r %の金融資産が n 年後に A_n 円になっているとすると

$$A_n = A_0 * (1 + 0.01 * r)^n$$

となると書ける事が解る。

さて，複利以外のケース，単利を考える。この方法だと毎年，何年経っても，もともとの元本の 100 万にしか利子は付かないので毎年 3 万づつなので 2 年後には $100 + 3 + 3 = 106$ 万となる。この差，9 百円の差が大きいか小さいかの判断はひとまず読者に委ねておこう。

さてこの単利と複利の差であるが，20 年位でもそれ程大きくない。勿論 2 年後に比べればかなり大きくなるがそれでも複利と単利でそれぞれ 180 万 6111 円と 160 万円と 20 万円程度の差である。そして 50 年程になると可成り差が大きくなり約 438 万円と 250 万円となり倍と迄は行かぬものの複利の方がだいぶ有利となる。これが複利の倍々ゲーム的な威力である。確認だが増えた部分も成長するか否かがその差となる。

それでは利子率の差を見て見よう。年利 1 %と 5 %を比較してみる。2 年後の額は年利 3 %の 106.09 万円に対してそれぞれ 102.01 万，110.25 万である。2 %と云うと 100 円のものが 98 円，1000 円のものでも 980 円と日常生活の 2 %引きは，人間その値引きに弱いものではあるが，それ程大きくは無いが，資産運用に於いてはなかなかの差となって出てくる。

この差は長期に於いてはヨリ明瞭になり，半世紀後 (50 年後) には１%，３%，５%の順で 100 万円がそれぞれ 164 万，438 万，1146 万円となり，とてつもない差がつく。殆どゼロ成長に近い低成長が 20 年も続いたバブル崩壊後の日本の低迷が如何に深刻な影響を我々の生活水準に与えたかが解るであろう。

72 の法則：「72 ÷金利　お金が 2 倍になる期間」　金利の差が年月を通じて巨大な差になると云う事を上では確認したが有名且つ簡単な概算方法がある。それが 72 の法則であり，72 を金利 (5 %だったら 0.05 ではなく 5) で割ると大体元本が２倍になる期間，利子率が年利だったら年数，となる，と云うものである。

ぞれぞれ年利１%，３%，５%で割ると７２年，２４年，１４．４年となるが，２倍を実際に越える年はそれぞれ７０年，２４年，１５年目となかなかの近似である。

ここで態々(わざわざ) 資金と書かずお金と書いたのは借金でも同じ事が云えて，しかも一般に借金の方が投資より金利が高い為に増えるスピードが段違いであり，お金を借りる際は注意をして欲しい。

3.2　瞬時的な話し

さて，前節では長い期間の話しをした。次は瞬時的な話しに移行する。経済は生き物であると屡々(しばしば) 云われる。株価は株式市場の開いている間中，その時々の情報や市場参加者の事情を元に変動しているし，なんなら市場が開いてない時間帯でも先物市場等で売買に参加することが可能である。

となると年利３%と云ってもヨリ細かく資産価値を評価する事もあり得よう。実際に銀行預金は(超低金利時代で殆どつかないけど)半年毎に利子が付くが，チラシには(税引き前の)年利で書かれている事が殆どである(当然，税引き後や半年の金利では見た目が小さくなってしまって魅力を損ねるからであろう)。

ここではまず年利３%の半年複利の金融商品を考えて見る。年利３%であるが半年後に貰える金利は半分の 1.5 %である。複利であるからその更に半年後，預け入れてから１年後にはその元本と利子分に半年で 1.5 %の利子が付くことになる。

これを式に直すと

$$\text{半年後の資産} = 100\,\text{万円} * \left(1 + \frac{0.03}{2}\right) = 101.5\,\text{万円}$$

である。もう半年経った１年後はどうなるかを考える。複利なのでこの 101.5 万円が次の半年の元本となり，結局

$$\begin{aligned}\text{半年複利での１年後の資産} &= 101.5\,\text{万円} * \left(1 + \frac{0.03}{2}\right) \\ &= 100\,\text{万円} * \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^2 = 103\,\text{万}\,225\,\text{円}\end{aligned}$$

となる。

瞬時的な話しであるからその差は僅かであるが，金利の計算をする〆日を半年毎に増やして**金利計算期間を区切るだけで貰える金額が(微かながら)増えている**ことに注目して欲しい。年利が同じ表記でも細かく区切って複利で計算する場合，単なる年利より増えるのである。

ではヨリ細かく区切ってみてらどうであろう。半年より細かい区切り方に４半期毎に(qurterly，雑誌が４カ月毎に発刊される場合の qurterly は季刊誌と訳される。形容詞としては年４回の，という意味になる)計算される場合がある。この場合は勿論，実際に excel かなんかで計算してみると，以下の様になる(銭単位切り捨て)。

$$\text{四半期複利での１年後の資産} = 100\,\text{万円} * \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^4 = 103\,\text{万}\,339\,\text{円}$$

長期の話しより更にささやかではあるが増えている事が確認できるであろう。更に増やすと，例えば毎日利子を計算すると，どうなるであろうか？分割する期間を n とすると上の思考実験から

$$n\,\text{期分割複利での１年後の資産} = 100\,\text{万円} * \left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^n\,\text{円}$$

と書けるであろう。実際に毎日複利 ($n = 365$!) を計算してみると 103 万 453 円 26.4 銭となる。この辺りになると $n = 364$ が 103 万 453 円 26.0 銭, $n = 366$ が 103 万 453 円 26.7 銭と殆ど増えない (けれど確かに増加している) 事が解る。

この様に**期間を細分化すると増えるが，その増え方は非常に小さくなる**事が解る。詰まり，残念ながらというかそんな美味い話しがある筈も無くというか，期間の細分化だけで貰える額を何処迄も大きくする事は不可能なのである。

何処迄も増えるが無限大に発散はしないと云う事は**どんどん増加分が小さくなって或る数にどんどん近づいて行く (収束する)** 事が考えられる。それを確認する為に，上の例から"元本や利子率に影響されない部分の数字"を取り出した上で n を無限に大きくしてみる。

元本は前に掛かっているだけであるから考えない様にするのは楽ちんであるので問題は利子率である。以下の様にすることで利子率の影響を除去することが可能となる。

$$\begin{aligned}\text{無限に分割複利での 1 年後の資産} &= \lim_{n\to\infty} 100\text{ 万円} * \left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^n \text{円} \\ &= 100 * \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^{\frac{n}{0.03}}\right\}^{0.03}\end{aligned}$$

$n \to \infty$ と $\frac{n}{300} \to \infty$ は同じなので結局"元本や利子率に影響されない部分の数字"は以下の様に与えられ得る。

$$e \equiv \lim_{\frac{n}{0.03}\to\infty}\left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^{\frac{n}{0.03}} = \lim_{s\to\infty}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \left(= \lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right). \tag{8}$$

この式で定義される e を実際に計算すると $e = 2.71828...$ と計算出来て，これが即ちネイピア数 (Napier's constant) 若しくは自然対数の底と呼ばれる数字である。

この結果 (数字 e) を使うと

$$\begin{aligned}\text{無限に分割複利での 1 年後の資産} &= \lim_{n\to\infty} 100\text{ 万円} * \left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^n \text{円} \\ &= 100 * e^{0.03}\end{aligned}$$

と書ける事になる。お金の単位は離散であるのに対してこの数は無理数であるので一般に近似値である。またこれは 1 年後の値で有り，2 年後なら $100 * (e^{0.03})^2 = 100 * e^0.06$，一般に t 年後の場合は $100 * (e^{0.03})^t = 100 * e^{0.03t}$ と書ける。

これらの結果を長期の話し同様，変数を使って一般的に表現してみる。即ち元本 A_0 円の年利 r %の金融資産が t 年後に $A(t)$ 円になっているとすると

$$A(t) = A_0 * e^{rt}$$

と書ける事が解る。今，指数の肩に乗っかってる部分 (rt) は単純な形であるが，利子率が時間で変化する (時間の函数となっている) 場合には積分 $(\int_0^t r(s)ds)$ になったりする。その場合，文字が小さくなって見づらいので exp という記号を使って

$$A(t) = A_0 * \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

と書いたりする。意味は $e^{\int_0^t r(s)ds}$ と同じである。

現在価値と当該期価値　(略)

4　指数と対数

ここまでで微分と逆函数とネイピア数を扱ってきた。これらを用いて指数と対数に関する議論を展開出来る。

前節では利子率と資産の関係をネイピア数と関連づけて見てきたが，毎期毎期 (瞬時的に) 増えて行く様な事象の描写に適合的である事が示唆された。資産もそうであるが，その他にも人口成長，経済成長，更には細胞や，昨今の新型コロナウイルスの感染者の増加等の表現も可能である。

詳しくは経済成長の資料を参照して欲しいが，ここではその計算に使う幾つかの公式を提示する。

先ずは指数函数 $y = f(x; a) = a^x$ の性質である。

- 定義域：$x \in \mathbb{R}$，値域：$y \in \mathbb{R}^+$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} * a^{x_2}$
- $a > 1$ なら単調増加，$a \in (0, 1)$ なら単調減少，$a = 1$ の時，定数函数 $y = 1$ である。
- グラフは点 $(0, 1)$ を通り，x 軸はその漸近線である

指数函数は単調増加/単調減少函数であるので $x = a^y$ なる y は x に対して一意に決まる。即ち $x = f(y) = a^y$ を y に就いて解いたものは函数となるので逆函数 $y = f^{-1}(x; a)$ が定義される。この指数函数の逆函数が対数函数であり，$y = f^{-1}(x; a) = \log_a x$ と書く。これまで主に (基本的には代数演算 (和，差，積，商，分数冪) のみでできる有限項の式で表せる) 代数函数を扱ってきたが，対数は三角函数等と同様に代数函数ではない＝超越函数である。

対数函数 $y = g(x; a) = log_a x$ の性質は以下の如しである。

- 定義域：$x \in \mathbb{R}^+$，値域：$y \in \mathbb{R}$
- $\log_a x_1 * x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

- $\log_a x^b = b\log_a x$
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- グラフは点 $(1,0)$ を通り，y 軸はその漸近線である

お互いに逆函数であるので各性質は対応している事が判る。

さて此処迄は (高校の) 文系数学の範囲である。ここからは理系数学の範囲となる。理系なら高校生も解く範囲なので頑張って就いてきて欲しい。

先ずは対数の微分である。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d\log_a x}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_s x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[\lim_{\Delta x\to 0} log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\end{aligned}$$

此処で $\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon$ と置くと $\Delta x \to 0$ の時，$\varepsilon \to 0$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{x}\log_a e \tag{9}$$

となる。微分をした結果先程のネイピア数が出てくることになる。このネイピア数を底とする対数を自然対数と云う (それ故にネイピア数のことを自然対数の底とも云う)。自然科学の分野では底が 10 の常用対数よりも頻出であり，屡々省略される。詰まり $\log x$ の底は 10 ではなく e の事が多い。特に自然対数であることを強調したい場合は ln と書かれることもある。

$\log_a a = 1$ を使えば自然対数の微分は

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

となる。これと逆函数の微分を使えば $y = e^x$ の時に $x = \log y$(更に上の公式より $dx/dy = 1/y$ となる) より

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

詰まり $y = e^x$ は微分しても形が変わらない (唯一の) 函数である。これは e^x の x での傾きが e^x であるという性質より成立する。