経済成長理論入門

Shiro KUWAHARA

2020 年 6 月 3 日

1　国民所得計算

Keywords：付加価値・GDP・GNP

レッセフェールの夜警国家ならいざ知らず，経済活動になんらかの介入を想定するとなるとその対象の経済活動の活溌さを測る指標が必要となってくる。

ニューディール政策でも職にあぶれた若い優秀な統計学者が雇用されてマクロ統計を整備していくことになる。(西内 啓 2013 `https://cakes.mu/posts/235`)

そういう意味で安倍内閣下での不透明な統計の操作 (GDP の基準の変更や実質賃金算出の変更更にはデータの廃棄) は大罪である。

現在，一般的に広く使われている経済の活溌さの指標は GDP である。

これは或る期間に或る地域で産出された付加価値の合計であると定義されて，一般に，対象の地域，日本なら日本，を固定して経年でその変化を見るので，t 年の某国の GDP として Y_t と書いたりする。

”付加価値の合計”と云うと解りにくいが，生産活動というものは投入した市場価値よりより多くの市場価値を目指して行うものであり，仕入れ値から売値を引いたものがその生産活動の付加価値である。勿論 ”仕入れ値 ”には投入量の一つである労働を雇用する際の労賃などが含まれる。

完結した経済があって国内で掘った鉄鉱石で製鉄してその鉄で自動車作ってディーラーで売るそしてそれしか経済活動の無い国があるとする。簡略化の為に労働は無視する。

鉱山会社：鉄鉱石掘削 (１兆円) →製鉄会社・鉄鉱石購入 (１兆円)・製鋼・鋼板販売 (１．５兆円) →自動車会社：鋼板購入 (１．５超円)・自動

車生産・同販売 (２兆円) →ディーラー：自動車卸売購入 (２兆円)・同販売 (２．５兆円) →家計：自動車小売購入 (２．５兆円)

鉱山会社は労賃や掘削設備費を無視して掘り出せるとしているので売上の１兆円がそのまま鉱山会社の産みだした付加価値となる。

製鉄会社の付加価値は１兆円の鉄鉱石から１．５兆円の鋼板を作り出したので０．５兆円 (５千億円) の付加価値となる。

…

江戸期の日本は戦国時代の名残からか兵と民を養う能力の指標であるコメの生産高が各大名の大きさの基準となっていた。１石は大人１名が１年間に食す米の量である。

今，生産の活溌度を測る指標は日本の GDP が約 5 兆ドル，500 兆円台半ばであるが，米ドルや円で測ると云う事は貨幣換算で測っていると云う事になる。もし或る国が１種類の財生産しかしていなければ，クルマ〇万台とかコメ〇万石とかチョーク〇万本とかで測った方が正確である。

しかし現在の社会は，現在で無くとも少しでも文明化した社会なら，多くの種類の財が販売されていて，ジェボンズの云うところの欲望の２重の一致を困難にしている訳であるが，同時に経済活動の活溌さの計測にも困難を発生せしめる。クルマ１００万台とコメ１０００万トン生産した年をクルマ２００万台とコメ５００万トン生産した年と比較してどちらかが経済活動が活溌だったかを調べるにはモノの数量で比較するのは困難になるのだ (勿論クルマ２００万とコメ１０００万トン生産した年となら比較可能だが，全ての数量の組み合わせで比較可能にしたい＝順序集合にしたい)。これを最も単純な形で表現するのが貨幣表示[1]であり，それ以外で一般的に構成可能な価値基準がなかなか見当たらないからなのである。詰まり単なる拝金主義ではないのだ (と云えなくもない)。

GDP にカウントされないもの　付加価値ではなく人間の幸福度で測れと云う興味深い指摘もあってブータンが GNH(国民総幸福) で測ると云う試みを提唱したが，主観的な指標であり，比較が難しく，また実際に経済発展 (GDP 増加) とともに幸福度が急降下していると云う結果もあり，経済的に豊かになり医療も充実する等が GNH では測れない様である。

主観を排し，各国間で比較検討可能な客観的な一指標として GDP は使われているだけであり，その他の価値観を否定するものでも，他の指標

[1]最も簡単な順序集合の一つに自然数があり，各財の生産量を貨幣換算することで，何兆円という単位だと小数が出ることがあるとしても円単位なら自然数で表現出来るのである。

の存在を否定するものでもない点に注意。

より実際的な問題としては家事労働などの無償労働がカウントされていないという問題がある。

詰まり，農家が自分の家で自分の家で喰うコメを作る時，その農家が一旦市場へ出荷し自分で購入したと計算する。詰まり，完全に自家用の時価労働なのに付加価値としてカウントされる。コメ生産はどのような形であれ社会的に生産行動と認められるけど，主婦のする食事の準備や掃除や育児は社会的な生産行動ではなく私的な行動であると看做されているようである。そろそろ食事ぐらいは外食が基本になっているから，家で家人に作って貰って食べても，家庭内で貨幣のやりとりを仮想的にやりとりが発生したとしても良いような気がする。掃除は家政婦の利用が一般的ではないので暫く計上はないだろうが，保育園の利用なんかもそろそろ普通のことで家庭内の育児を GDP に計上してもよいかもしれない。

物価水準と名目と実質　(未)

ケインズ経済と新古典派経済，景気変動から経済成長へ　ケインズ経済学の有効需要原理と新古典派のセイの法則は真逆の理論である。方や需要，方や供給が国民所得 Y を決定するとしている。

そもそも新古典派の源流の古典派は未だ産業が脆弱な頃に産まれ，作った財は稀少で余っても値段さえ下げれば必ず売れるという或る意味牧歌的な時代のものであった。ケインズ経済学は重化学工業の進展とともに進んだ独占の特徴下でその価格メカニズムが機能不全と成った時代に登場することに成る。恰度，大衆消費社会の萌芽が見られたアメリカの黄金の 20 年代の最後に襲った大恐慌後の処方箋として提示されたものである。大規模な生産技術は作ろうと思えば幾らでも，は言い過ぎとしても，世界の需要を満たして余りある工業製品を作り出す能力を手に入れてしまったのである。その倒錯した世界では皆が欲しいから作るのでは無く，作るから売らねばならないのである。果たしてこの正反対の枠組みのどちらを採用すればいいのであろうか？

(未完)

結論を云うと，我々は新古典派の枠組みを採用する。我々が成長するのは資本家が保有しながらも買い手の付かない有効需要不足を政府が補う結果として規模が拡大する訳ではない。消費者が不要だと云っているのに政府が需要を保証することを見越して規模を拡大して行く不健全な経済を描写したいのではない。我々はより品質の高い財をより多く消費

したいと考えており，将来それを実現する為に貯蓄をしたり教育を受けるのである。その貯蓄は厳しい選別を受けて投資に回され，企業は魅力的な投資プランを提示して出資や融資を募り，結果として経済規模が拡大していく。長期に亘って政府の支出なしではやっていけないような企業はお呼びではないのである。

(未完)

2　新古典派マクロ一般均衡

今，経済が同質な企業からなるとする。その生産函数 (生産技術・投入量と産出量の関係を)$Y = F(K, L)$ と置く。此処で Y，K，L は生産量，資本投入量，労働投入量とする。新古典派生産函数に於いては K と L に関して規模に関する収穫一定 (数学的には一次同次) と稲田条件が仮定されることが多い。規模に関する収穫一定と稲田条件に関しては (未)

企業は，使用する投入要素に代金を支払い生産物を市場価格で販売し，その差が企業の (名目) 利潤となるのでそれを Π とすると

$$\Pi = PY - RK - WL \tag{1}$$

と書ける。此処で P, R, W はそれぞれ名目価格，名目利子率，名目賃金である。

価格を 1 に正規化する。これによって物価変動に寄る名目的な影響を排除して考える事が出来る。R と W を P で割って (実質) 賃金を π とすると

$$\pi = Y - rK - wL \tag{2}$$

となる。

完全競争を仮定するので，価格 r，w は所与であり，一階の条件は K と L に関する以下のものとなる：

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = 0. \tag{3}$$

コブ・ダグラス型生産函数　コブ・ダグラス型生産函数 (Cobb-Douglas production function, Cobb & Douglas 1928) は最も多用される生産函数の特定化である。具体的には以下の様に特定化される。

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{4}$$

此処で Y，K そして L はそれぞれ生産量，資本投入量，労働投入量である。
　上で求めた最適化条件を適応すると以下の様に成る。

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}. \tag{5}$$

　労働シェアと資本シェアが概ね一定

$$\frac{rK}{Y} = \alpha, \quad \frac{wL}{Y} = 1 - \alpha. \tag{6}$$

資本シェア：労働シェア＝１：２なので $\alpha = 1/3$ が現実に相当すると云える。計算の簡便さのみならずこの実証結果との整合的な結果が Cobb-Douglas 型生産函数が広く使われてきた理由である。
　但し問題が無い訳では無い。ケインズ経済学では労働分配と資本分配を与えてモデルを閉じられていた (根井 1994) に対して新古典派の元では技術的な与件になってしまい労働組合などを通じた労上げ機能が無意味なものと看做されてしまう。特に昨今の労働シェアの減少傾向が見られた中で，この設定は危険ですらあるかもしれない。
　ここで労働者一人当たり資本 $k := K/L$，同 GDP$y := Y/L$ を導入する。以下が成立する。

$$\begin{aligned} y =& k^{\alpha} := f(k), \\ r =& \alpha k^{\alpha-1} = f'(k), \\ w =& (1-\alpha) k^{\alpha} = f(k) - f'(k)k. \end{aligned} \tag{7}$$

となる。k が一定の時，利子率 r と賃金率 w は一定となる。
　利子率及びそれに一致する資本の限界生産性は資本の減少函数になっている ($f''(k) < 0$) がこれは生産函数に通常求められる条件である上に，比強婦に応じて或る限界生産性を与える資本ストック量を解析的に解くことも可能である。

3　資本ストック蓄積

Keywords：フロー・ストック・総生産・純生産

　マクロ変数にはフロー変数とストック変数の２種類がある。
　フロー変数は毎期発生する貨幣価値であることが多く，その期で費消される。ストック変数は毎期のフローで増減する変数である。

恰度，風呂の蛇口からの注水と排水口からの排水がフロー(将に流れflow)であり，貯まるお湯の量がストックである。

典型的なストック変数に資本 K がある。注水にあたるものが投資 I(お湯では無く資本ストックを貯める)であり，排水にあたるものが資本減耗 δK(資本ストックが使用され劣化していく)である。此処で δ は資本減耗率であり，ここでの設定のように外生一定と仮定される事が多い。詰まり既存の資本ストックは，一定率で磨り減って毀れて行くと仮定されている。(会計制度なども一定の比率で資本が減耗していく様処理しているようである。実際は帳簿上の減耗以上に資本が長持ちするケースが多い様であるが。)

さて t 期の資本ストック K_t が t 期の投資と資本減耗によって来期の資本ストック K_{t+1} となる(今期の投資は来期に使える様になるというタイムラグがあるとする)訳であるが，上の議論から以下の様に定式化出来る。

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t, \quad \text{若しくは} \quad \Delta K_t = I_t - \delta K_t. \tag{8}$$

総生産と純生産 (未)

4 人口と成長

Keywords：自励系微分方程式

人口成長を通じて成長とは何かを考える。

先ずは素朴な例を考える。2020年に人口100万人の或る都市が翌2021年に人口105万人になったとすると(その都市の)人口成長率は5％だと直感的に分かるであろう。

どの要素がどう効いて5％という数字が現れるか考えて見る。すると100万の人口に対して増加分の5万人の比率，これが $\frac{5}{100} = 5\%$ という成長率を与えている事が判る。詰まり

$$\text{成長率} = \frac{\text{増加分}}{\text{全体数}}$$

ということである。2020年の人口100万を N_t と書くとすると2021年の人口105万は N_{t+1} と書ける。それぞれ人口は年頭，詰まり元日の人口とすると，$N_{t+1} - N_t$ は2020年１年間の増加分となるので成長率は2020年のもの即ち n_{t+1} ではなく n_t のものとなる。離散系では基準がどこに成る

のか注意が必要である。今，差分演算子を Δ と置くと $N_{t+1} - N_t = \Delta_t$ と書けるので結局

$$n_t = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = \frac{\Delta N_t}{N_t}, \quad \text{若しくは} \quad 1 + n_t = \frac{N_{t+1}}{N_t} \tag{9}$$

と書ける。

この差分方程式は初期値 N_0 を与えることで解くことが出来る。n が一定の場合は簡単で，$1 + n = N_{t+1}/N_t$ より，数学的帰納法を用いれば

$$N_t = (1+n)^t \, N_0, \quad \text{for} \quad t = 1, 2, 3, ... \tag{10}$$

と書ける事を簡単に示すことが出来る。n_t が時間に寄って変化する場合は一寸複雑に成るが積の記号 Π を導入することで簡単に表現出来る。n が一定の場合の $(1+n)^t$ の項が毎期の $1+n$ の積である事に注意すればやはり帰納法で

$$N_t = \prod_{\tau=1}^{t-1} (1 + n_\tau) \, N_0 \tag{11}$$

と書ける。此処で $\prod_{i=1}^{N} x_i = x_1 * x_2 * ... * x_N$ である。

この様に t 期後の人口 N_t は初期値と $\tau = 1$ 期から $\tau = t-1$ 期の成長率で決まってくる。毎期の成長率を与えれば毎期の人口が出るし，毎期の人口を与えれば各期の人口成長率が算出出来ることになる。

さてこれらは離散系であった。実際のデータと突合させる際などは離散データなので適合的である。一方で基準を明示しないと多少の混乱の虞れがある他，成長率の各種計算をする際に微積分を使えないという不便さがある。ここでは連続系を導入する。

(9) に対応する連続系の人口成長の式は,

$$\frac{dN(y)}{dt} = \dot{N}(t) = n(t)N(t), \quad \text{若しくは} \quad n(t) = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}, \tag{12}$$

となる。

これを初期値 N_0 を与えて解くと

$$N(t) = N(0)e^{nt}, \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

となる。解くと云うが，これは方程式ではなく時間に関する微分方程式であり，微分方程式は一般にテクニカルな解法が定まっている事が多い。

これは一階常微分方程式という種類の微分方程式である。解法に特化したテキストなどもあるので必要に応じて読むことをお勧めする。(例えば石村 (1995) など)

n が時間に寄って変化する場合は一寸複雑に成るが積分を導入することで簡単に表現出来る。毎期 n の値が t 期続くとその人口成長の実効量が nt と書けるのは一辺が n 及び t の長方形の面積に対応している。変動する n の 0 から t 迄の実行量も面積として計量できると考えると n が時間 τ の函数として

$$\int_0^t n(\tau)d\tau$$

と書ける。此処で τ は時間であるが，現在の時間 t に対して更に区間 $[0,t]$ の各時間を動かすに必要となる時間変数であるから別の時間を示す変数を定義している事に注意。これが nt に相当する箇所なので結局，人口成長率が変動をする場合の人口は

$$N(t) = N_0 e^{\int_0^t n(\tau)d\tau} = N_0 \exp\left\{\int_0^t n(\tau)d\tau\right\} \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{14}$$

exp は e と同じである。e の肩に積分計算式が載るようなことが今回のケースのようによくあるがフォントが小さくなって見づらくなるので exp の後ろの括弧内に大きく書けるようにしたものである。

5 Solow model

以下ではいよいよ時間を通じた経済の変化を取り扱っていく。入門レベルのテキストでは離散系で解説しているものが多いが，多くの尖端的な研究が連続系でされているのでここでは前章で見たような連続系で分析をする。(連続系を用いたよいサーベイに古いが岩井 (1994) がある。)

Solow model の追加的な仮定は Keynes 経済学で仮定されたケインズ型消費函数

$$C = cY, \quad c \in (0,1)$$

此処で c は限界消費性向 marginal prophency of conumption である，の裏表の存在である Solow 型貯蓄函数とでも云うべき

$$S = sY \tag{15}$$

である。

短期を扱うケインズ経済学で短期的な影響を見たいのに将来の例えば増税予想すら立てずに漫然と所得の一定部分を消費に回す消費者像を前提として政策効果を論じるのがケインズ経済学の拙さの一つであるが，その対抗馬の新古典派モデルも先ずは同じ様な何があっても所得の一定部分を貯蓄に回す消費者像を前提として先ずはモデルを組むのである。勿論，短期ではなく長期の分析が目的であるから長期的にはより安定的であるという正当化が論拠となる。更には外生一定の貯蓄率は最適成長理論ですぐさま内生化される事になる。

このソロー型貯蓄函数を金融市場の均衡条件式である $S = I$ を用いて４節で導出した資本ストックの式に代入して，５節で見た連続系の設定を適応すると以下の様に成る。

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K \tag{16}$$

さらにソローモデルを初めとする多くの成長モデルは人口成長と労働供給を同一視する。(未完)

この設定下では５節で導入した人口成長の成長式が同時に労働供給を示す式にもなり

$$\dot{L} = nL \tag{17}$$

を得る。これら２本の動学方程式を，３節で導入した一人当たりの変数 k に適応する。k に対数を取って時間微分して

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{18}$$

を得る。これらに K と L の動学方程式を代入すると全てが K と L が消せて k の函数として以下の様に書ける。

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \tag{19}$$

この変形に於いてコブ・ダグラス生産函数の特定化迄は不要で，$F(K, L)$ から $f(k)$ への変換に必要なのは生産函数の規模に関する収穫一定，数学的には一次同次性だけである。

これを解くと経済は二つのフェーズ，遷移過程と定常状態の２種類が出ることが判る。

(略)

Kaldor の云う定型化された事実 stylized facts は定常状態の記述である。

5.1 技術進歩・イノベーションの導入

定常状態を考えると一部が Solow model の帰結と合わない。
技術進歩を入れる必要がある。

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \tag{20}$$

効率労働者単位当たり資本 $\tilde{k} := K/(AL)$，同 GDP$\tilde{y} := Y/(AL)$ の導入

$$\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}(:= f(\tilde{k}))), \quad r = \alpha\tilde{k}^{\alpha-1}, \quad w = (1-\alpha)A\tilde{k}^{\alpha}. \tag{21}$$

定常状態で $\tilde{y}, \tilde{k}$ そして r は一定だが労賃だけは A の成長と共に上昇する。
賃金上昇の為にはイノベーションが必要！

5.2 黄金律と動学的不効率性

定常状態での消費量 c を最大化するような c を考える。
(導出未完)

$$\text{資本蓄積の黄金律：}\quad f'(k) = n(+\delta) \text{ を満たす } k \tag{22}$$

貯蓄率が高過ぎる場合は資本ストックが黄金律水準より高くなり，貯蓄率を下げて資本ストックを取り崩していくことで遷移過程と定常状態の双方の消費量を上げることが出来る。詰まり貯蓄率を下げる事は経済厚生は必ず上げると云える。

一方で貯蓄率が貯蓄率が低すぎる場合は資本ストックが黄金水準より低くなり，貯蓄率を上げることで定常状態の消費量を上げることが出来るのであるが遷移過程を通じて消費量を減らさなくてはいけない。詰まり効果は ambigurous である。

遷移過程のマイナスと定常状態のプラスを評価する基準を導入する必要がある。消費行動の最適化の分析が必要。

6 最適成長理論

全知全能 almighty で善意の benevolent 政府を考える。この政府は民の効用を完全に把握し，経済を制馭する事で，彼らの効用を忠実に最大化しようとする。

ここで代表的家計 (個人)representative household (agent) を考える。その家計は以下の様な効用を持つと仮定される。

$$U = \int_0^\infty u(c)e^{-\rho t}dt \tag{23}$$

以下で見るように，定常状態が存在する為には $\sigma = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}$ が一定である必要があるが，これを満たす函数型は

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0$$

である。以下ではこの特定化を利用する。特に $\sigma = 1$ の時に $u(c) = \log c$ となる。

この最適化問題を解く為にハミルトニアン・ハミルトン函数を構成する。先ずは当該期価値 current value ハ函数から。

$$\mathcal{H} = u(c) + \lambda\big\{f(k) - c - (n+\delta)k\big\} \tag{24}$$

此処で λ は (当該期価値) ラグランジュ乗数である。最適な条件は以下の通り。

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c} = u'(c) + \lambda(-1) = 0 \tag{25}$$

$$\rho\lambda - \dot{\lambda} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k} = \lambda\{f'(k) - n - \delta\} \tag{26}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda e^{-\rho t}k_t = 0 \tag{27}$$

次ぎに現在価値 present value ハ函数から。

$$\tilde{\mathcal{H}} = u(c)e^{-\rho t} + \tilde{\lambda}\big\{f(k) - c - (n+\delta)k\big\} \tag{28}$$

此処で λ は (当該期価値) ラグランジュ乗数である。最適な条件は以下の通り。

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial c} = u'(c)e^{-\rho} + \lambda(-1) \tag{29}$$

$$\dot{\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial k} = -\tilde{\lambda}(f'(k) - n - \delta) \tag{30}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\lambda}k_t = 0 \tag{31}$$

結局 $\lambda e^{-\rho t} = \tilde{\lambda}$, $\mathcal{H}e^{-\rho t} = \tilde{\mathcal{H}}$ とした時，両者は完全に一致することを各自確認されたい。

これらの式からこちらが勝手に置いた λ を消去する事で以下の２式を得ることが出来る。

$$\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big)c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{32}$$

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'\big(k(t)\big) - n - \delta - \rho \tag{33}$$

Solow model は結局 $\dot{k} = \psi(k)$ (or $\dot{\tilde{k}} = \tilde{\psi}(\tilde{k})$) の式一本に縮約された。其処で $k - \dot{k}$ (or $k - \dot{k}/k$) 平面で分析することが出来た。

今回は $\dot{k} = \phi(k,c)$ 及び $\dot{c} = \xi(k,c)$ の２本に縮約された。これは $(k,c,\dot{k},\dot{c})$ の４つの変数からなる４次元なので Solow の様な図に書くことは出来ない。

この場合は (k,c) 平面上に $\dot{k}$ と $\dot{c}$ の方向を書き込む位相図 phase diagram と呼ばれる手法で分析出来る。

$$\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (n+\delta)k(t)\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\}0$$

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'\big(k(t)\big) - n - \delta - \rho\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\}0$$

を考える。これより

$$\dot{k}(t)\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\}0 \Rightarrow c(t)\left\{\begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array}\right\}f\big(k(t)\big) - (n+\delta)k(t)$$

$$\dot{k}(t)\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\}0 \Rightarrow f'\big(k(t)\big)\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\}n + \delta + \rho$$

を得る。$\dot{k} = 0$ と $\dot{c} = 0$ の線が境界線と成ってゐる。$\dot{k} = 0$ は黄金律でも出てきた曲線と同じである。これは同じ定常状態 $\dot{k} = 0$ を扱っているから。

$\dot{k} = 0$ に関しては限界生産性の問題。限界生産性が逓減していく元ではより高い限界生産性はより少量の資本蓄積に対応している。黄金律 $k^{\$} =$

$\arg\{\,k\,|\,f'(k)=n+\delta\}$ に対してこちらは修正黄金律 $k^{¥}=\arg\{\,k\,|\,f'(k)=n+\delta+\rho\}$ と呼ばれる。条件は修正黄金律の方が $+\rho$ の分だけ高い限界生産性を要求しており，より小さな資本蓄積量に対応している。

これを描画して $\dot{k}$ と $\dot{c}$ の正負を書き込んだものが図 1 である。

$\dot{k}=0$ 且つ $\dot{c}=0$ 且つ長期に亘って $c>0$ な点はただ一点 SS のみである。

参考文献

[1] Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928). "A Theory of Production" (PDF). *American Economic Review*. 18 (Supplement): 139-165. JSTOR 1811556.

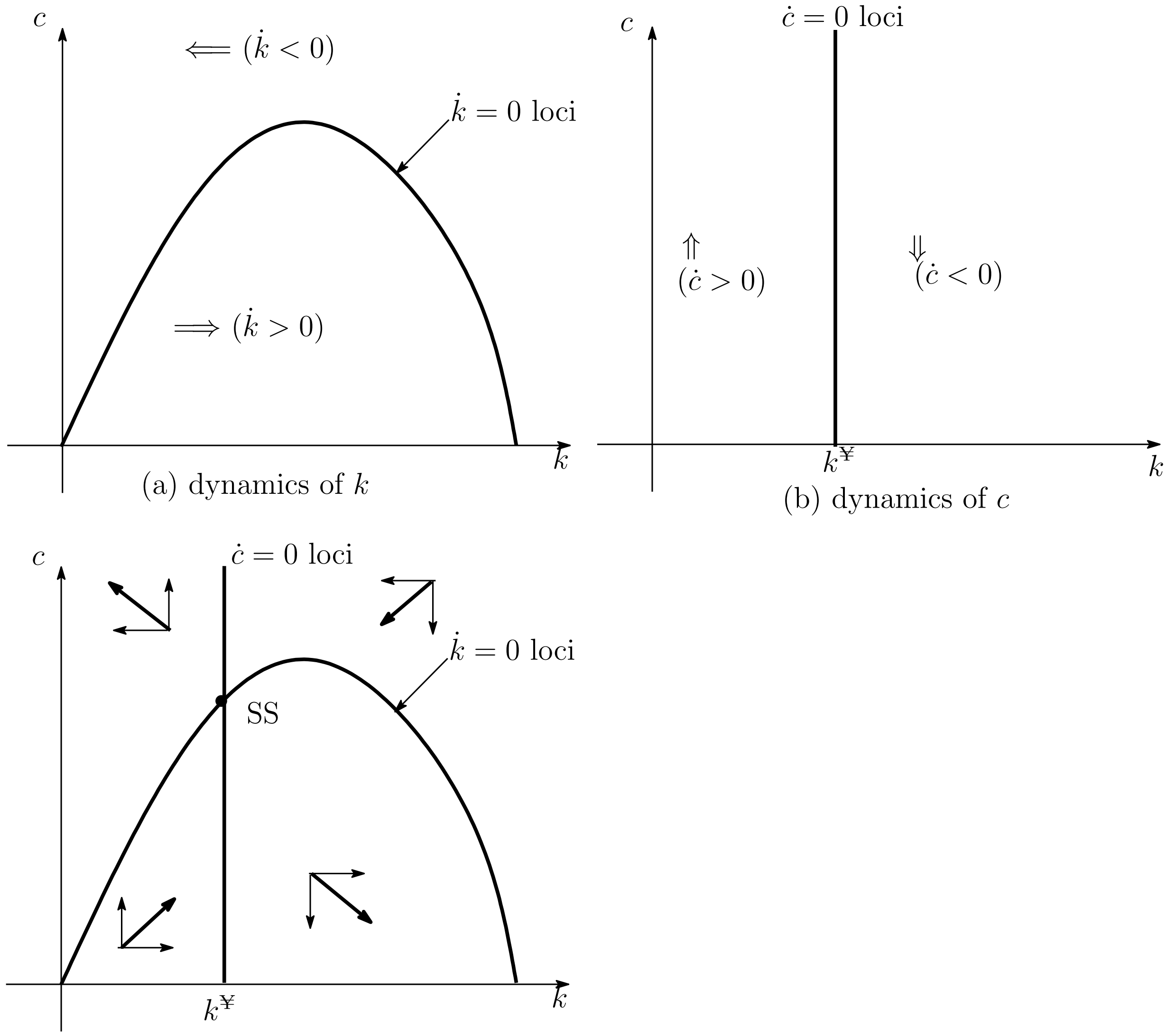
`https://assets.aeaweb.org/asset-server/journals/aer/top20/18.1.139-165.pdf`

[2] 石村園子 (1995) 『すぐわかる微分方程式』　東京図書

[3] 岩井克人 (1994)「経済成長論」 岩井・伊藤編『現在の経済理論』所収 東京大学出版会

[4] 西内 啓 (2013) 『統計学が最強の学問である』ダイヤモンド社

[5] 根井 雅弘 (1994)『現代経済学講義』 筑摩書房



(c) compounded dynamics of k and c

図 1: Phase diagram