Sinmple Version of the Uzawa-Lucas Model

Shiro Kuwahara*

July 12, 2025

1 Introduction

Uzawa-Lucas model は代表的な人的資本蓄積を含む二部門モデルである。モデルは価格の歪み distortion を含まず，外部性等がなければ分権経済と集権経済が一致するなどの新古典派成長モデルの性質を共有する。一方で人的資本蓄積，教育部門，の線形性が長期的成長の源泉となりその教育部門への資源配分が内生的に定まるので内生的成長理論の一つに位置づけられている。このモデルではイノベーションは労働得者に体化されると考えている事になる。

このモデルは基本的には Ramsey model に人的資本蓄積部門を加えたモデルである。モデル内の人的資源 human resource は労働 labor ではなく人的資本 human capital であり，人的資本の一部を教育投資に回し，残りを生産に回す。詰まり Ramsey 型で利用される技術革新を伴った総生産函数

$$Y = F(K, AL)$$

ここで Y, K, A, L はそれぞれ生産，資本，技術，労働，に於いて，効率労働単位 AL に於いて，技術が体化されている embodied とすると人的資本 $H = AL$ となる。更にこの H は最終財と教育資本蓄積に配分されるので最終財部門での投入量 (雇用量) を H_Y と置くと

$$Y = F(K, H_Y)$$

となる。

もう一方の人的資本の投入先である教育部門への投入量を $H_E(= H - H_Y)$ とすると，

$$\dot{H} = bH_E$$

となる。この仮定が H の長期的な成長を可能として，それに応じて生産・資本蓄積・消費の長期的な成長をもたらすことになる。

*University of Hyogo E-mail address: kuwahara@econ.u-hyogo.ac.jp

This paper is organized as follows: section 2 sets up the model, section 3 derived the steady states, and section 4 discuss the dynamics and stability of the system.

2 The Model

2.1 The production structure

我々は通常の Uzawa-Lucas model の構造を考える。最終財は (実物) 資本と (労働の代わりに) 人的資本で生産され，最終財は消費と投資に使われる。投資は (実物) 資本蓄積に回るが資本は一定率 $\delta_k(\geq 0)$ で減耗すると仮定されるのでその補填にも回る。これらを受けて最終財の資源制約式は以下の様に成る：

$$\underbrace{\dot{K}(t) - \delta_k K(t)}_{\equiv I(t)} + C(t) = Y(t) = \underbrace{AK(t)^{\alpha} H_Y(t)^{1-\alpha}}_{\equiv F(K(t), H_Y(t)) \text{ or } Y(t)}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

此処で $\dot{Z}(t) = dZ/dt$ であり，K，C，Y，H_Y はそれぞれ (実物) 資本，消費，総生産，最終財生産に投下される人的資本である。

Uzawa-Lucas model は外部性を入れて分析されることが多い。Lucas (1988) は生産部門に人的資本の外部性を導入した。Comez (2003, 2004) も外部性と最適政策を分析した興味深い例である。Uzawa-Lucas model に於ける長期の成長の決定要因である教育 (人的資本蓄積) の効率性 (b) に資本蓄積の外部性を入れた例に Kuwahara (2014) がある。

本項では外部性は考慮しないので分権経済と集権経済は一致する。分権経済で求められる利子率 (r) と労賃 (w)(もしくは物的資本及び人的資本のレンタル価格) は以下の様になる：

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} H_Y^{1-\alpha}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial H_Y} = (1-\alpha) A K^{\alpha} H_Y^{-\alpha} \tag{2}$$

となる。価格＝限界性生産性の競争一般均衡の基本的性質が満たされている。

$H_Y \equiv uH$ とすると u は後から出てくる教育部門と最終財分門の間の人的資本の配分比率を全体に対する最終財部門側で表示した比率であり，H が人的資本総量である。

それぞれ人口一人当たりの量で考える事にする。人口を N とすると $k = K/N$，$h = H/N$ となる。

この元で (1) は以下の様に成る

$$\dot{k}(t) = \underbrace{Ak(t)^{\alpha}(u(t)h(t))^{1-\alpha}}_{y(t)} - c(t) - (n + \delta_k)k(t). \tag{3}$$

次に教育部門を考える。

$$\dot{H} = bH_E - \delta_h H = b(H - H_Y) - \delta_h H, \quad b > 0. \tag{4}$$

ここで b は教育の効率性であり，H_E は教育部門に投下される人的資本総量である。δ_h は資本減耗率に対応する外生的に与えられた人的資本の減耗率である。知識の陳腐化や高齢に寄る引退などが dominate するとするとこのパラメーターは正値を取り，初等教育を終えたり移民などで一定の知識を持った人的資本の流入が人的資本市場にあってそれが dominate すると減耗率は負値となる。負値の場合は，自動的に一定の知識を得た人的資本が外部より供給されるような状況となる。流入する人的資本が平均値よりも低い場合は減耗率はプラスとなる。

最終財の資源制約と同様に一人当たりで記述すると以下の様に成る：

$$\dot{h}(t) = b(1 - u(t))h(t) - (n + \delta_h)h(t), \quad b > 0, \tag{5}$$

此処で教育部門を高等教育と考え，人口が増える分の人的資本の一人当たりの稀薄化 $(-n)$ が初等・中等教育から人口成長に伴い供給される人的資本 $(-\delta_h > 0)$ に恰度相殺される場合は，この項が消えて $\dot{h}(t) = b(1 - u(t))h(t)$ となる。この形で分析されているモデルも多い。

家計も Ramsey model で通常仮定される時間に関して下方分離且つ CRRA タイプのものを仮定する。

$$\max \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} e^{-\rho t} dt, \tag{6}$$

ここで $\theta(> 0)$ と $\rho > 0$ はそれぞれ CRRA パラメータ (相対的リスク回避度一定) 及び主観的割引率である。

Uzawa-Lucas model は価格の歪み distortion を含まないので集権経済と分権経済が一致する。ここでは集権経済でモデルを解いて系の動学方程式を得ることとする。ハ函数は以下の様に書ける：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} &+ \mu_1(t)\big\{Ak(t)^\alpha(u(t)h(t))^{1-\alpha} - c(t) - (n + \delta_k)k(t)\big\} \\ &+ \mu_2(t)\big\{b(1 - u(t))h(t) - (n + \delta_h)h(t)\big\}.\end{aligned}$$

3 Dynamic Equations

本節では動学方程式を導出，経済の動きを描写する動学系を構成する。上で与えたハ函数より以下の最適化条件 (一階の条件及び横断面条件) を得る：

$$\mu_1(t) = c(t)^{-\theta}, \tag{7}$$

$$\mu_2(t)(1-\alpha)\frac{y(t)}{u(t)} = \mu_2(t)bh(t), \tag{8}$$

$$\rho\mu_1(t) - \dot{\mu}_1(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k(t)} = \mu_1(t)\alpha\frac{y(t)}{k(t)} - n - \delta_k, \tag{9}$$

$$\rho\mu_2(t) - \dot{\mu}_2(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial h(t)} = \mu_1(t)(1-\alpha)\frac{y(t)}{h(t)} + \mu_2(t)b(1-u(t)) - n - \delta_h, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu_1(t)k(t) = 0, \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu_2(t)h(t) = 0, \tag{11}$$

ここで λ と μ はそれぞれ物的資本及び人的資本の影の価格 (shadow prices) である。 これらより動学方程式を導出する。(7), (8), (9), 及び (10) から以下の２式が得られる：

$$\rho - \frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)} = \underbrace{\alpha\frac{y(t)}{k(t)}}_{=r(t)} - n - \delta_k, \tag{12}$$

$$\rho - \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} = \frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}(1-\alpha)\frac{y(t)}{h(t)} + b(1-u(t)) - n - \delta_h = b - n - \delta_h, \tag{13}$$

(7) と (12) を用いて以下のオイラー方程式を得る：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\big\{r(t) - \rho - n - \delta_k\big\} \tag{14}$$

ここで $x := k/h$ とすると r の定義より $r = \alpha A x^{\alpha-1}u^{1-\alpha}$，また x の定義より

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \frac{r(t)}{\alpha} - q(t) - \delta_k - b(1-u(t)) + \delta_h \tag{15}$$

を得る。ここで $q := c/k$ である。定義より

$$\begin{aligned}\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} &= \frac{1}{\theta}\big\{\alpha A x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - \rho - n - \delta_k\big\} - \big[A x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t) - \delta_k - n\big] \\ &= \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right) r(t) + q(t) - \frac{\rho}{\theta} - \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)(n + \delta_k)\end{aligned} \tag{16}$$

(8), (12)，(13) を用いて以下を得る：

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= \frac{1}{\alpha}\left[b - \delta_h - r(t) + \delta_k + \alpha\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\right] \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha}(b - \delta_h + \delta_k) + bu(t) - q(t).\end{aligned} \tag{17}$$

最後に $r = Ax^{\alpha-1}u^{1-\alpha}$ より

$$\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} = (1-\alpha)\left(\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} - \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\right) = \frac{1-\alpha}{\alpha}(b - \delta_h - r(t) + \delta_k). \tag{18}$$

これらより経済の動学系を q，r，u の 3 本で記述することが出来る事が解る。(r の代わりに x で系を構成することも可能である。)

Uzawa-Lucas は 3 次元の方程式系で記述可能。

特に r に関しては既に (18) より安定的である事が解る。ただしこれは外部性等が入って居ない一番簡単な形状だからであり，拡張すると必ずしもこれは成立しない。

4　定常状態

動学方程式系が得られたので，その性質を求めていく。先ずは定常状態を求め，次節でその定常状態周りでの安定性を求めていくという手順を取る。定常状態での変数 z を z^* と書くこととする。また時間の函数である変数 z の成長率を $g_z := \frac{\dot{z}}{z}$ と書くとする。 定常状態での変数 z の成長率は g_z^* である。(1) 及び (4) もしくは (3) 及び (5) より u^* は一定，これを使って

$$g_Y^* = g_C^* = g_K^* = g_H^* = b(1-u^*) - \delta_h \tag{19}$$

が成立する。これより $g_y^* = g_c^* = g_k^* = g_h^* = b(1-u^*) - (n+\delta_h)$，更に $g_r^* = g_q^* = g_u^* = 0$ が成立する。(2) より $g_r^* = g_w^* = 0$ も成立する。

4.1　諸条件

$\dot{r}^* = 0$ を (18) に代入すると，

$$r^* = b - \delta_h + \delta_k \tag{20}$$

を得る。これは変形して $r^* - \delta_k = b - \delta_h$ とすると人的資本と物的資本の限界変形率の均等化の条件となる。この世界での 2 種類の投資に関する利潤機会の均等化が実現している無裁定条件である。

また r^* は所与のパラメータより一意に決まることとなる。またこの r は (無裁定条件であるからであり，資本の投資は稲田条件によりあらゆる水準

に対応して可能であるから，ゼロの投資が可能となるのは人的資本のみであるので) 正の人的資本投資を伴う均衡で成立する。その為の条件は $r^* > 0$ である。

r^* に於いて $r^* > 0$ の為には $b > \max[0, \delta_h - \delta_k]$ が必要である。

(17) より $\dot{u} = 0$ を代入すると

$$u^* = \frac{q^* - \frac{1-\alpha}{\alpha} r^*}{b} \tag{21}$$

を得る。

(20)，(21) 及び $\dot{q} = 0$ を (16) に代入すると

$$q^* = \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\alpha}\right) r^* + \frac{\rho}{\theta} + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)(n + \delta_k) \tag{22}$$

(21) 及び (22) より

$$bu^* = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)(b - \delta_n - n) + \frac{\rho}{\theta} \tag{23}$$

微分方程式の定常状態の条件では無く，マクロ経済の関係からこれらを導出することもできる。(3) 及び (5) から $g_y^* = g_k^* = g_c^* = g_h^* = b(1 - u^*) - n - \delta_h\big(:= g^*\big)$ が云え， (7) 及び (8) より $-\theta g_c^* = g_\mu^* = g_\lambda^*$ が云える。それ故，$g^* = -(1/\theta) g_\mu^*$ を (13) に代入すると

$$(1 - u^*)b - \delta_h - n = \frac{1}{\theta}\big(b - \delta_h - n - \rho\big)(= g^*). \tag{24}$$

を得る。ここから矢張り (23) が得られることが解り，経済の定常状態での成長率は以下の様になる。

Result 1　経済の長期の定常成長率は

$$g^*(b, \delta_h, n, \theta, \rho) = \frac{1}{\theta}\big(b - \delta_h - n - \rho\big) \tag{25}$$

で与えられる。長期の成長率は生産側は影響を与えず教育部門 (b, δ_h)，人口成長 (n)，家計の選好 (θ, ρ) から決まる。

一人当たり成長率が正である為には $b > \delta_h + n + \rho$ が必要となる。

簡略化の為に $n = \delta_h = \delta_k = 0$ を代入すると

$$u^* = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta b}, \quad g^* = \frac{1}{\theta}\big(b - \rho\big) \tag{26}$$

となる。この形も (効用函数が対数線型の場合は更に $\theta = 1$ で簡単になる) 良く出てくることになる。

　x の定義より定常状態では

$$x^* = \left(\frac{\alpha A}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} u^*. \tag{27}$$

となっている。

4.2　ゼロ成長の罠のケース

次に定常状態で正の成長が発生しないケースを考える。定常状態での変数 z $(x = u, r, q)$ を z^{**} と書くこととする。この場合，(20) の式に於いて等号が不等号になる。

$$r^{**} > b - \delta_h + \delta_k \tag{28}$$

この場合は人的資本投資がゼロ $(u^{**} = 1)$ になり，Solow 的な世界に帰着することになる。

　そして $u^{**} = 1$ より

$$r^{**} = A\big(x^{**}\big)^{\alpha-1}, \quad q^{**} = A\big(x^{**}\big)^{\alpha-1} - n - \delta_k \tag{29}$$

となる。Euler 方程式等に $u^{**} = 1$ を入れると

$$r^{**} = n + \delta_k + \rho - \theta(\delta_h + n) \tag{30}$$

を得て，人的資本が $n + \delta_h$ の率で減少して行くのに応じて資本蓄積も低下していくこととなるのが経済の定常状態での状態となる。人口減少下での定常状態の様になる。人口減少などが非現実的な場合は $n + \delta_h < 0$ が必要となる。$n > 0$ の場合は $\delta_h < 0$ を仮定する必要があり，これは人口成長により自動的に人的資本が供給されるケースである。

　また簡略化の為に $n = \delta_h = \delta_k = 0$ を代入すると人的資本は一定値を取り減少はしない。人口成長のゼロのケースの Solow モデルと似た形となる。

4.3　横断面条件

最後に横断面条件を確認する。(11) より $\rho \geq g^*_\lambda + g^*_k$ 及び $\rho \geq g^*_\mu + g^*_h$ を得る。$p := \mu/\lambda$ 及び $x := k/h$ は定常状態で定数なのでどちらかが成立すれば他方も成立する。

　$g_\lambda = -\theta g_c = -\theta g^* = -(b^* - \delta_h - n - \rho)$ と $g^*_k = g^* = b^*(1 - u^*) - \delta_h - n$ を $\rho \geq g^*_\lambda + g^*_k$ に代入すると $b^* u^* \geq 0$ を得る。詰まり $u^* > 0$ の Uzawa-Lucas 的な regime では横断面条件を満たす。また $u^{**} =$ 　の Solow-Ramsey 的な regime でも成立は簡単に確認することが出来る。

5 安定性分析

以上で，微分方程式 $\dot{q}(t), \dot{u}(t), \dot{r}(t)$ と定常状態の値 q^*, u^*, r^* を得たので安定性分析が可能である。定常状態周りで微分方程式を線型化する。

5.1 動学系の線型化

微分方程式を再掲する。

$$\dot{q}(t) = \left[\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right) r(t) + q(t) - q_0\right] q(t) \tag{31}$$

$$\dot{u}(t) = \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}(b - \delta_h + \delta_k) + bu(t) - q(t)\right] u(t) \tag{32}$$

$$\dot{r}(t) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\big(b - \delta_h + \delta_k - r(t)\big) r(t) \tag{33}$$

ここで $q_0 = \frac{\rho}{\theta} - \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)(n + \delta_k)$ である。また定常状態の値を再掲する。

$$q^* = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta}\right) r^* + q_0 \tag{34}$$

$$u^* = \frac{1}{b}\left(q^* - \frac{1-\alpha}{\alpha} r^*\right) \tag{35}$$

$$r^* = b - \delta_h + \delta_k \tag{36}$$

これらより定常状態周りで線型化を行う。

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q^* & 0 & \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right) q^* \\ -u^* & bu^* & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\alpha}{\alpha} r^* \end{pmatrix}}_{:= J^*} \begin{pmatrix} q(t) - q^* \\ u(t) - u^* \\ r(t) - r^* \end{pmatrix},$$

where

$$J^* := \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial q(t)}{\partial q(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial q(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial q(t)}{\partial r(t)}\right|^* \\ \left.\frac{\partial u(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial u(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial u(t)}{\partial r(t)}\right|^* \\ \left.\frac{\partial r(t)}{\partial q(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial r(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial r(t)}{\partial r(t)}\right|^* \end{pmatrix} \tag{37}$$

安定性はこのヤコブ行列 (ヤコビアン)J^* の固有値の正負に依存する。3 次元のシステムであり，系は 3 次元系であるので三つの固有値を持ち，更に系は k と h の二つの状態変数が含まれているので正の固有根 (発散根) が 2 つ，負の固有根 (安定根) が 1 つの時，鞍点安定 (定常状態へ収束する経済の

動学経路がただ一つ存在し，予測可能な合理的期待 (予想均衡) と整合的な状態) となる。

この系の三つ固有値を λ_i $(i = 1, 2, 3)$ とすると，それは以下の特性方程式 $\Gamma(\lambda) = 0$ の解となる。

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = -\lambda^3 + Tr^*\lambda^2 + B^*\lambda + Det^*$$

ここで λ, Tr^* and Det^*, はそれぞれ固有値，トレース (跡，trace)，行列式 (determinant) である。B は以下で示される定数 (トレースや行列式と違って鞍点安定な場合は計算不要で余り重要でないせいか名前が無い？) である。

$$B^* = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial q(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial u(t)}\right|^* \\ \left.\frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial u(t)}\right|^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{u}(t)}{\partial r(t)}\right|^* \\ \left.\frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial u(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial r(t)}\right|^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial q(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial r(t)}\right|^* \\ \left.\frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial q(t)}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial r(t)}\right|^* \end{vmatrix} \tag{38}$$

定義やサラスの公式等を用いて Tr^* と Det^* を計算すると以下を得る：

$$\begin{aligned} Det^* =& q^*bu^*\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}r^*\right) < 0 \\ Tr^* =& q^* + bu^* - \frac{1-\alpha}{\alpha}r^* = 2\left[\left(1-\frac{1}{\theta}\right)r^* + q_0\right] = 2\left[\left(1-\frac{1}{\theta}\right)(b-\delta_h-n) + \frac{\rho}{\theta}\right]. \end{aligned}$$

ここで $Tr^* = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$，$Det^* = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ より，$Det^* < 0$ 且つ $Tr^* > 0$ の時は $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{+, +, -\}$ の組み合わせしかなく鞍点安定が云える。($Tr^* > 0$ が云えてないのでこの結論は未だ得られていない。)

$Tr^* > 0$ は横断面条件から示すことが出来る。(7) 及び (11) より，無限期先の定常状態では $-\rho + g_{\mu_1} + g_k < 0$ 即ち $\theta g_c - g_k + \rho > 0$ が必要。

定常状態では $g_c = g_k = g^* = \frac{1}{\theta}(b - \delta_h - n - \rho)$ より，結局

$$\theta g_c - g_k + \rho = (\theta - 1)g^* + \rho = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)(b - \delta_h - n) + \frac{\rho}{\theta} > 0 \tag{39}$$

が云える。詰まり $Tr^* > 0$ が必ず成立する。

Result 2　外部性の入っていない本バージョンの *Uzawa-Lucas model* は鞍点安定性を示す。

6　結語

Uzawa-Lucas model は人的資本蓄積の内生化により，完全競争の下での簡単な構造で内生的成長が生み出せて，更にここに要素を加えることも容易であ

るなど巾広く使われてきた。(例えばBenhabib & Perli 1994, Xie 1994, Gomez 2003,2004 など)

長期の成長率の一番重要な決定要因は教育 (人的資本投資) の効率性の b となり，この高さが高い成長率を実現することになる。

更に簡単にしようとすると人的資本蓄積が事実上物的資本蓄積と同じ最終財の投資の形を導入すれば良い。Uzawa-Lucas の最大の特徴である２部門性が消えて１部門モデルとなる。

$$Y = C + I_K + I_H, \quad \dot{K} = I_K - \delta_k K, \quad \dot{H} = I_H - \delta_H H \tag{40}$$

この場合，直接，人的，物的資本投資の間での裁定が働き H/K 比が一意に決まり，モデルは AK モデルに近い物になる。更に $\delta_H = \delta_K$ の時に解析的に H/K が求まり分析も簡単となる (Barro & Sala-i-Martin 2003(4.2 節) などを参照されたし)。

References

[1] Benhabib, J. & Perli, R., (1994) "Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth", *Journal of Economic Theory* 63 113-142.

[2] Barro, Robert J. & Xavier I. Sala-I-Martin (2003) *Economic Growth, second edition* (Mit Press)

[3] Gomez, Manuel A., (2003) "Optimal fiscal policy in the Uzawa-Lucas model with externality" *Economic Theory* 22, pp. 917-925.

[4] Gomez, Manuel A., (2004) "Optimality of the competitive equilibrium in the Uzawa-Lucas model with sector-specific externalities" *Economic Theory* 23, pp. 941-948.

[5] Kuwahara, Shiro (2014) "Multiple Steady States, and Poverty Traps in the Uzawa-Lucas Model with the Educational Externality Effects" University of Hyogo, Discussion Paper Series.

[6] Lucas, R. E. Jr., (1988) "On the mechanism of economic development" *Journal of Monetary Economics* 22(1), 3-42.

[7] Uzawa, H., (1965) "An aggregative model of optimal technical change" *International Economic Review* 6, 18-31.

[8] Xie, D., (1994) "Divergence in Econmic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equlibria" , *Journal of Economic Theory* 63.