1 The Uzawa-Lucas model(宇沢-ルーカスモデル)

Ramsey に人的資本蓄積を加えたモデルである。モデル内の人的資源 human resource は労働 labor ではなく人的資本 human capital であり，人的資本の一部を教育に回し，残りを生産に回す。教育に回された人的資本を原資に人的資本が蓄積していくことになる。詰まり，技術水準を考慮に入れた総生産函数は

$$Y = F(K, AL)$$

と仮定することが出来るが，$H = AL$ とし，技術が教育によって労働者の内部に体化された (embodied) モデルということになる：

$$Y = F(K, H_Y) \tag{1}$$

ここで H_Y が生産部門に雇用された人的資本。この世界の人的資本の投入先は最終財生産のみならず教育 (人的資本蓄積) 部門もあるので明示が必要となる。

教育部門は教育投入の線型の函数を持つと仮定される。これが成長の源泉となる。教育投入を $H_E = H - H_Y$ とする，ここで H が人的賦存総量である，と以下の様な特定化をする：[1]

$$\dot{H} = b(H - H_Y) = bH_E \tag{2}$$

分権経済を仮定する。そして人口成長を無視し人口規模は N で一定，総生産函数の１次同次を仮定して $y = Y/N$，$k = K/N$，$h = H/N$，$u = H_Y/H$ を導入する (一人当たり量で書き直しコブダグラスを用いて特定化する)。

$$y = f(k, uh) = k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} \tag{3}$$

$$\dot{h} = b(1-u)h \tag{4}$$

資本蓄積や効用も Ramsey model と同じ：

$$\dot{k} = f(k, uh) - c \tag{5}$$

$$v = \int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \tag{6}$$

生産に関する新古典派マクロ経済の生産者均衡が成立している。

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial H_Y} \tag{7}$$

[1] $\dot{L} = nL$ や $\dot{A} = gA$ に代わる成長可能な要素として投入に対する産出の線型性が必要になる。

これより[2]

$$r = \alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}, \quad w = (1-\alpha)k^{\alpha}(uh)^{-\alpha} \tag{8}$$

家計の予算制約は資産は資本しかないので $\dot{k} = rk + wuh - c$ となる。予算制約と教育に関する人的資源配分の制約のもとで効用 (6) を最大化する。

Ramsey model と同様にハミルトン函数を構成する：

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda(rk + wuh - c) + \mu b(1-u)h \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\theta} + \lambda(-1) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \lambda wh + \mu b(-1)h = 0 \tag{11}$$

$$\rho\lambda - \dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \lambda r \tag{12}$$

$$\rho\mu - \dot{\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = \lambda wu + \mu b(1-u) \tag{13}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda e^{-\rho}k = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \mu e^{-\rho}h = 0 \tag{14}$$

ここで (12) より

$$-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = r - \rho \tag{15}$$

(10) と (15) より

$$\theta\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho \tag{16}$$

これはお馴染みのオイラー方程式 (ケインズ・ラムゼイー公式) である。この式を満たすように消費の成長率を調整していくのが最適となる。

(11) より

$$\mu b = \lambda w \tag{17}$$

(17) を (13) に代入して λ を消去すると

$$\rho\mu - \dot{\mu} = \mu bu + \mu b(1-u) = \mu b \quad \text{詰まり} \quad -\frac{\dot{\mu}}{\mu} = b - \rho \tag{18}$$

[2] Ramsey の $r = \alpha k^{\alpha} = f'(k)$, $w = (1-\alpha)k^{\alpha} = f(k) - f'(k)k$ に対応していることに注意。

を得る。一方で (17) より

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\dot{w}}{w} \tag{19}$$

(15) と (18) を (19) に代入して λ と μ を消去すると

$$\frac{\dot{w}}{w} = r - b \tag{20}$$

この等式が成立するように人的資本の労働供給と教育の配分を調整していくのが最適となる。

w の決定は (8) で定められるので

$$\frac{\dot{w}}{w} = \alpha\left(\frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{u}}{u} - \frac{\dot{h}}{h}\right) = r - b = \alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - b \tag{21}$$

となる。今，(3)，(4) と (5) より $\frac{\dot{k}}{k} = k^{\alpha-1}(uh)^{\alpha-1} - \frac{c}{k}$ と $\frac{\dot{h}}{h} = b(1-u)$ を (21) に代入する：

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{b - \alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}}{\alpha} + k^{\alpha-1}(uh)^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - b(1-u) \tag{22}$$

$$= \frac{b}{a} - \frac{c}{k} - b(1-u) \tag{23}$$

以上で各変数 k, h, c, u に関する動学方程式が全て得られた事になる：

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)^{\alpha-1} u(t)^{1-\alpha} - \frac{c(t)}{k(t)} \tag{24}$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = b\bigl(1 - u(t)\bigr) \tag{25}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)^{\alpha-1} u(t)^{1-\alpha} - \rho\right\} \tag{26}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{b}{\alpha} - \frac{c(t)}{k(t)} - b\bigl(1 - u(t)\bigr) \tag{27}$$

今の所４つの変数に４つの方程式であるが，これを三つの変数，三つの方程式に纏めることが出来る。$q := \frac{c}{k}$，$x := \frac{k}{h}$ を定義する。この表現の元で

上記の４動学方程式は以下の様に成る：

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t) \tag{28}$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = b\big(1-u(t)\big) \tag{29}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - \rho\right\} \tag{30}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{b}{\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big) \tag{31}$$

更に

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big) \tag{32}$$

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - \rho\right\} - \big(x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t)\big) \tag{33}$$

となるので

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big) \tag{34}$$

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - \rho\right\} - \left\{x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t)\right\} \tag{35}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{b}{\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big) \tag{36}$$

を得る。三つの変数に対して三つの方程式と次元を１つ下げることが出来た。

この三次元微分方程式の定常状態を与える x, q, u をそれぞれ x^*, q^*, u^* と書く。この x^*, q^*, u^* の周りで方程式を線型近似する。

先ずは定常状態を求める。$\dot{x} = \dot{q} = \dot{u} = 0$ が成立。

$$0 = x^{*\alpha-1}u^{*1-\alpha} - q^* - b\big(1-u^*\big) \tag{37}$$

$$0 = \frac{1}{\theta}\left\{\alpha x^{*\alpha-1}u^{*1-\alpha} - \rho\right\} - \left\{x^{*\alpha-1}u^{*1-\alpha} - q^*\right\} \tag{38}$$

$$0 = \frac{b}{\alpha} - q^* - b\big(1-u^*\big) \tag{39}$$

(37) と (39) より $-q^* - b\big(1-u^*\big)$ を消去すると

$$b = \alpha x^{*\alpha-1}u^{*1-\alpha} (= r^*) \tag{40}$$

左辺は人的資本投資の限界生産性，右辺は物的資本投資の限界生産性と表していて，定常状態では両資本投資の収益率が等しくなっている事を示している。

(40) を (39) に代入する。

$$q^* = \frac{1}{\alpha}b - \frac{1}{\theta}(b-\rho) \tag{41}$$

(41) を (38) に代入する：

$$(g_c^* =)\frac{1}{\theta}(b-\rho) = b(1-u^*)(= g_h^*) \tag{42}$$

最適な消費成長率と最適な人的資本成長率が等しくなっている。これに含まれる未知数は u^* のみなので u^* が得られる。

$$u^* = \frac{\rho - (1-\theta)b}{\theta b} \tag{43}$$

u は人的資本の配分比率であるから $u^* \in (0,1)$ が満たされている必要がある。実は $\lim_{t\to\infty} \lambda e^{-\rho}k = 0$ より $(1-\theta)g^* - \rho < 0$ が定常状態では必要である。但し定常状態に於いて $g^* = g_h^* = g_k^* = g_c^* = b(1-u^*) = (1/\theta)(b-\rho)$ より…(保留)… $u^* > 0$ は家計の最適化条件から云える。

但し定常状態に於いて正の教育投資が行われる $u^* < 1$ かどうかは補償されない。これが満たされる為には技術的条件が満たされる必要がある。(43) と $u^* < 1$ より $b > \rho$ が導ける。詰まり教育効率 b が主観的割引率 ρ よりも大きい必要がある。

(40) と (43) より

$$x^* = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\rho-(1-\theta)b}{\theta b}\right) \tag{44}$$

定常状態の値が出たところでこの定常状態周りで微分方程式を線型化する[3]。

[3]線型化：$\dot{x}(t) = \psi(x(t))$ に対して点 x^* で線型化するというのは $x = x^*$ での接線を求めると云う事。詰まり

$$\dot{x}(t) = \psi'(x^*)(x - x^*). \tag{45}$$

となる。定常状態なので $\dot{x}^* = 0$ となっていることに注意。(接線の方程式:$y(t) = f'(x^*)(x(t) - x^*) + f(x^*)$ に相当している。)

更に二つ以上の変数からなる動学系 $\dot{x}(t) = \psi(x(t), y(t))$, $\dot{y}(t) = \phi(x(t), y(t))$ が有った時

まずは系を構成する $(\dot{x},\dot{q},\dot{u})$ を並べる。

$$\dot{x}(t) = \left\{x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big)\right\}x(t) \tag{49}$$

$$\dot{q}(t) = \left\{\frac{1}{\theta}\left\{\alpha x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - \rho\right\} - \left\{x(t)^{\alpha-1}u(t)^{1-\alpha} - q(t)\right\}\right\}q(t) \tag{50}$$

$$\dot{u}(t) = \left\{\frac{b}{\alpha} - q(t) - b\big(1-u(t)\big)\right\}u(t) \tag{51}$$

これを各変数で微分して定常状態上で評価 (x^*, q^*, u^* を代入) する。

まず手始めに $\dot{x}$ を x で微分してみる：

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \left\{(\alpha-1)x^{\alpha-2}u^{1-\alpha}\right\}x + \underbrace{\left\{x^{\alpha-1}u^{1-\alpha} - q - b(1-u)\right\}}_{=\dot{x}/x} \tag{52}$$

となる[4]。これに定常状態の値を代入する。この時定常状態の値なので $\dot{x}=0$, 詰まり右辺の 2 項目である $\{x(t)^{\alpha-1}u^{1-\alpha} - q - b(1-u)\} = 0$ となる事に注意。また (40) も代入。すると以下の様になる。

$$\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\right|^* = \left\{(\alpha-1)x^{*\alpha-2}u^{*1-\alpha}\right\}x^* = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{b}{x^*}x^* = -\frac{1-\alpha}{\alpha}b \tag{54}$$

残る $\partial\dot{x}/\partial q$，$\partial\dot{x}/\partial u$ も計算すると

$$\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right|^* = -x^* + \underbrace{\left\{x^{*\alpha-1}u^{*1-\alpha} - q^* - b(1-u^*)\right\}}_{\dot{x}/x|^*=0} = -x^* \tag{55}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial u}\right|^* = \left\{(1-\alpha)x^{*\alpha-1}u^{*-\alpha} - b(-1)\right\}x^* = \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha u^*}\right)bx^* \tag{56}$$

に線型化するとは

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \psi^*}{\partial x}(x(t)-x^*) + \frac{\partial \psi^*}{\partial y}(y(t)-y^*) \tag{46}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial \phi^*}{\partial x}(x(t)-x^*) + \frac{\partial \phi^*}{\partial y}(y(t)-y^*) \tag{47}$$

となる。これを変形すると

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} & \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} & \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t)-x^* \\ y(t)-y^* \end{pmatrix} \tag{48}$$

このような行列表示が出来る。この 3 次元バージョンを考える事になる。

[4]形としては $\dot{x}=f(x)x$ の形をしているので

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = f'(x)x + f(x) \tag{53}$$

の形をしていることに注意。

引き続き $\dot{q}$ と $\dot{u}$ も x，q，u で偏微分して定常状態の値を代入していく。

$$\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial x}\right|^* = -\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{(1-\alpha)b}{x^*}q^* \tag{57}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right|^* = q^* \tag{58}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial u}\right|^* = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{(1-\alpha)b}{u^*}q^* \tag{59}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right|^* = 0 \tag{60}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial q}\right|^* = -u^* \tag{61}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}\right|^* = bu^* \tag{62}$$

これらより微分方程式体系 (49)〜(51) は

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial u}\right|^* \\ \left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial x}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial u}\right|^* \\ \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial q}\right|^* & \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}\right|^* \end{pmatrix}}_{:=J(\text{ヤコビ行列 (Jacobian)})} \begin{pmatrix} x(t) - x^* \\ q(t) - q^* \\ u(t) - u^* \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1-\alpha}{\alpha}b & -x^* & \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha u^*}\right)bx^* \\ -\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{(1-\alpha)b}{x^*}q^* & q^* & \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{(1-\alpha)b}{u^*}q^* \\ 0 & -u^* & bu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x^* \\ q(t) - q^* \\ u(t) - u^* \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

この 3 次元系の動学的性質はどうなっているかであるが，自由には取れない (操作変数の操作を通じて間接的に値を調整する) ストック変数が二つ (k と h) 入っているがそれらは $x = k/h$ の一つに纏められているのでストック変数は一つである。定常状態に至る安定解が存在する為には安定根が 1 つ以上ある必要がある。残る不安定部分は操作変数の操作によって調整可能となる。

ヤコビヤンは系の安定性と結びついている。固有値の符号が問題となり，鞍点安定の為には $\{++-\}$ が必要となる。実はヤコビアンの特性方程式 $\Lambda(\lambda) = |J - \lambda E| = 0$ の解が固有値となっていて，解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると $TrJ = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$，$DetJ^* = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ の形になる。$\{++-\}$ の為には $TrJ > 0$，$DetJ < 0$ が云えれば良い。