1　前提

・19 世紀的な景気循環は 20 世紀，特に第二次大戦後，安定的な経済成長に置き換わった。持続的な拡大再生産が豊かな社会をもたらしたのである。豊かな社会とは 1920 年代のアメリカの黄金の (狂乱の)20 年代を嚆矢とする大衆消費社会であり，一人当たりの生産高の持続的な拡大が可能とした。

・GDP の決定要因が有効需要原理 (ケインズ経済学) かセイの法則 (新古典派) か？→セイの法則を選択。ほっとくと需要が不足して生産能力が発揮されない状態よりは，資源が足りなくより豊かな状態を求めている状態。
・セイの法則を前提とすると GDP は生産函数で現される。$Y = F(K, L)\cdots$ 本源的な投入要素は資本 K(機械設備など) と労働 L。→資本と労働の動きを説明出来れば GDP の動きを説明出来る。

・成長という概念$\cdots\dfrac{\text{増加分}}{\text{全体}}$。連続時間の元では変数 $X(t)$ に対して $\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = g_X$ が成長率。但し $\dot{X}(t) = dX(t)/dt$。

・労働 L に関しては人口と同一視する。労働供給は人口成長率で成長

・資本に関しては Solow モデルでは貯蓄率一定で供給される。ストック変数 (此処では K) とフロー変数 (ここでは I とか δK) の違いにも注意が必要。

・総計変数と一人当たり変数…各経済主体の豊かさを示すのは集計量 (総計量) ではなく一人当たり量。国全体の所得 (生産した付加価値の) 総量を Y とすると一人当たりの量は $y = Y/L$ で現される。変数の動きは k の動きに纏められる。(L の動きが外生一定成長率だから可能。)

2　The Solow model

前提：GDP(Y) の持続的増加 (＝指数函数的な増加) が存在し，国の豊かさを決定的に規定する。それを分析する一番簡単な分析視角としてのソローモデル (the Solow model) を紹介していく。

マクロ変数 (集計変数 Aggregate Variables) と国民所得の決定　GDP とは或る年 (時間)，或る国 (場所) で産出された付加価値の合計 (総計) である。要するに生産総額である。対象となる国は固定されるので Y は時間 t の変数として立ち現れることになる。

Y がどうやって決まるのか？国民所得論的な定義の説明はここでは省略。決まり方，新古典派 vs ケインズ派の対立がある。

新古典派は供給側から決まり (セイの法則)，ケインジアンは需要側から決まる (有効需要原理) と考える。現在の成長論は新古典派的な供給サイドが制約になると考える。長期の GDP の動きを考えるのが成長である。

長期に於いては価格の調整が行われて効率的な資源配分をしつつ貯蓄が投資に回って成長を果たしていく新古典派的な世界を想定する方が自然である。

その時に GDP の決定要因は，総需要 Y^D などではなく，生産投入要素であり，その本源的な生産投入要素は労働 L と資本 K(と技術 A) に分けられる。L と K はその投入に応じて要素支払い，労働は賃金，資本は利子 or レンタル代が支払われる。詰まり，Y は L と K を投入要素とする生産函数で表される。

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

ではこの生産函数が満たすべき性質はどのようなものであるか，考えて見る。

新古典派生産函数は通常，以下の二つの性質が (現実を反映して) 仮定される。

$$\text{稲田条件：}\quad \lim_{X\to 0}\frac{\partial Y}{\partial X} = \infty, \quad \lim_{X\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial X} = 0, \quad (X = L, K)$$

この稲田条件は相対的に投入規模が小さい時には生産性が高く，同じく投入規模がデカくなっていくと生産性が低下することを含意している。詰まり，L も K も必須の生産要素であり，限界生産力逓減の法則が成立している事を意味している。

$$\text{規模に関する収穫一定：}\quad F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

数学的には生産函数は一次同次である，一次同次性を満たすと呼ばれる。投入要素である L と K を「同時に」２倍すると生産量 Y も２倍になるという性質である。個々の生産要素に対しては収穫逓減 (規模をでかくすると効率が下がる) が成立するが，同時に増やせばそれが起きない事を示している。誤解を恐れずに云ってしまうと，１箇所の工場では生産の上限があってそれ以上生産しようとすると効率が低下するが同じ工場を幾つでも建てる事で効率を落とすことなく拡大生産が可能である，というような状況である。

実際には特定化した函数形が用いられることが多い。一番良く使われるのが Cobb-Douglas 型生産函数と呼ばれ以下の形をしたものである。

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1) \tag{2}$$

この函数が上の二つの性質を満たしている事を確認していく。

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha-1} = \infty, \quad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha-1} = 0, \tag{3}$$

L に関しても同様で成立している事が解る。詰まり Cobb-Douglas 型生産函数は稲田条件を満たしていると云える。

規模に関する収穫一定 (一次同次) も以下の様に成立は自明である。

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda K^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L)$$

この GDP の大きさの決定要因を明らかにしていく。

労働供給量と人口　労働供給量 L に関しては，人口規模と簡略化の為に同一視する。詰まり L は労働供給量にして人口。人口一人当たりの労働供給量が一定であるという前提 (簡略化の為の仮定) が措かれている事に注意。一般に人口成長と労働供給は同一視出来ないが，必要なら必要に応じてモデルに組み込めば良い。実際に，経済発展とともに女性の地位向上などで教育年数や労働供給性向は変化する。また人口成長と労働供給が全く無関係に長期的に成長し続けることは出来ない。労働時間が人口と無関係に成長し続けることは出来ない。人口規模が一種の上限として機能する。以上の 2 点から人口規模と労働供給の同一視は正当化され得る。今，人口成長率を n と置くと以下の式が成立する。

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n. \tag{4}$$

此処で $\dot{X} := \frac{dX(t)}{dt}$ を示す時間微分である。(:= は定義を示す。)　これは人口に関する一階の自励系の微分方程式になっている。微分方程式は積分なのでこの形の場合，初期条件を与えることで一意に解くことが出来る。初期の人口を L_0 とすると

$$L(t) = L_0 e^{nt} \tag{5}$$

となる。様々なテキストでは同じ人口動学が様々な表現が出てくるので形式が違っても同じであることに注意。

資本ストック量と投資　資本の時間を通じた変化は人口の様に生物学的に一定という訳には行かない。経済主体の投資行動によって資本ストック量が変化していく。フロー (flow) 変数がストック (stock) 変数を変化させていくと云う構造がある。

風呂桶を想像して欲しい。お湯を入れる蛇口から給湯されるお湯の量，排水口から捨てられるお湯の量がフローである。給湯量と排水量を調整してお風呂のお湯の量は決められる。

湯船のお湯の量に当たるのが資本ストック量 K。蛇口からの給湯量にあたるのが投資 I，排水量に相当するのが資本減耗 δK である。ここで資本減耗は実際の支出は伴わない。実態として捉えることが難しい。会計上も一定

割が自動的に減損することになっている。経済モデルに於いても資本の一定割合が自動的に毀れて無くなるとする。その一定割合が資本減耗率であり δ と書かれ，減耗総量はそれに資本ストック量を掛けた δK となる。資本の変化を差分の演算子 Δ を用いて書くと

$$\Delta K = I - \delta K \tag{6}$$

今は連続系で経済体系を記述しようとしているのでその場合，資本の時間に関する変化，時間微分となり

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{7}$$

となる。

金融市場の均衡を仮定すると，投資 I は貯蓄 S に一致する。即ち $I = S$ が成立する。

Solow 型貯蓄函数　モデルを閉じる為には，所得 Y を消費 C と貯蓄 S にどの様に分けるかを導入する必要がある。Solow は所得の一定割合を貯蓄に回すと考えた。ここでは Solow 型貯蓄函数と呼び以下の様に書ける。

$$S = sY, \qquad s \in (0, 1) \tag{8}$$

此処で s は貯蓄率である。

Keynes 型消費函数 $C = cY(+\underline{c})$ は所得の一定割合を消費に回すというものであった (c が (一人当たり消費量では無く) 限界消費性向 marginal propensity of comsumption。基礎消費 $\underline{c}$ を入れる場合もある)。短期的な政策効果を見たい場合にこの ad hoc(恣意的な) なケインズ型消費函数がネックになり，マイクロファンデーション (ミクロ経済学的基礎付け，microfoundation) が重視されるようになったのが昨今の経済学であるが，Solow では初等的なモデルであり，また長期的な安定的な消費-投資比率を前提としてもさしあたって分析の目的を阻碍はしない為，マイクロファンデーションがない Keynes 型消費函数の裏表の関係にある Solow 型貯蓄函数を用いて分析する。

資本の動学方程式　以上の準備から，Solow model の鍵となる方程式である資本の動学方程式が得られる。(1)，(7)，(8) 及び $I = S$ より

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) = sF(K(t), L(t)) - \delta K(t) \tag{9}$$

を得る。貯蓄行動が資本を蓄積していくと云う基本方程式である。

K と L が GDP を決めるという式が総生産函数 (1) であり，その K と L の動きを表現するのが (9) と (4) であるので，これで Y の動きは完全に説明出来たことになる。

マクロ変数と一人当たり変数　簡略化の仮定の一つとして (総) 労働供給 (L) と人口 (N) の同一視を行った。この設定の許では労働者一人当たりの変数と一人当たり変数も同一視出来る。

主に出てくる一人当たり変数はさしあたって以下の二つ。

$$y \equiv \frac{Y}{L}, \quad k \equiv \frac{K}{L} \tag{10}$$

総計量 (集計量) が国全体の量で大文字で書かれることが多いのに対して一人当たり量 (一人頭量) は国民一人当たり平均の量 (実際は不平等があるが平等に分配するもとでの量) であり，小文字で書かれる事が多い。

k に関しては国民一人当たりの保有資産残高 (平均資産保有) とも解釈出来る (N で割ったと考えた場合) し，資本装備率 (労働者一人当たりの機械設備量，L で割った考えた場合) とも解釈出来る。

ここで $Y = F(K, L)$ は一次同次の性質を持つ。詰まり $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ である。今 $\lambda = 1/L$ とすると

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K, L) = F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L\right) = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = F(k, 1) \equiv f(k) \tag{11}$$

となり，一人当たり GDPy は一人当たり資本ストック k のみの函数として与えることが出来る。

定常状態と遷移過程　我々は経済の動きを描写する動学方程式を２本手に入れた。(4) と (9) である。(4) を解いた (5) から明らかな様に，L は時間 t の経過とともに無限大に発散する。無限大に発散し続ける変数を扱うのはやや面倒である。一方で，１時点の経済分析で云う所の均衡 (equilibrium) に相当する。変数間の成長率が一定となってその状態で止まる状況，定常状態 (steady state) という，が重要になる。経済が一旦其処へ到達すると永続的に止まる事が出来るからである。またこの定常状態では系が均衡同様，停まって居るかの如く定数で表現出来て便利である。

この定常状態への移動中を遷移過程・遷移動学 (transitioin path/transition dynamics) と呼ぶ。経済が遷移過程にあるのか，定常状態にあるのかと区別するのは重要である。

近年の東アジアや東南アジア，嘗て (第二次大戦後) の日本の高度成長や西ドイツの奇跡は遷移過程であり，現在の先進国の安定的な成長は定常成長と考えられている。先ずはこの様な成長開始時の急成長とその後の安定成長への移行をモデルが描写できることが望ましい (Solow モデルは以下で見る様にそれを実現する。)

Solow の基本動学方程式の導出　定常状態 (均斉成長経路 balanced growth path) 上で定数となるような変数で記述すると便利である。ここでは上で定

義した $k(t) = K(t)/L(t)$ を用いる。実はこれに拠って (4) と (9) の２本の動学方程式からなる系がたった１本の動学方程式で表現出来ることにもなる。k の定義より自然対数を取って時間微分すると

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{12}$$

を得る[1] [2]。これより各変数間の成長率の差に分解できたことになる。

この (12) 式に先程導出した (4) と (9) を代入すれば良い。

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{F(K(t), L(t))}{K(t)} - \delta - n \tag{13}$$

ここで (11) より $\frac{F(K,L)}{L} = f(k)$ が成立するので上の右辺第一項の分母分子をそれぞれ L で割ってやると以下を得る。

$$s\frac{F(K(t), L(t))}{K(t)} = s\frac{\frac{F(K(t),L(t))}{L(t)}}{\frac{K(t)}{L(t)}} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} \tag{14}$$

(12) に (14) を代入しつつ両辺に k を掛けると結局変数が k のみの微分方程式を得る。

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t) \tag{15}$$

この微分方程式は K と L に関する動学的情報がそのまま埋め込まれたものであり，詰まり２本の微分方程式が１本に纏められたものと云える。

こいつの性質を調べれば k の動きから y 更には $\dot{K}$ も判ることになる。

$f(k)$ の性質は元の $F(K, L)$ が満たす稲田条件から $f'(k) > 0$，$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$，$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ を満たす。

各自，代表的な特例化例である $Y = F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ の元で確認されたし。($y = f(k) = k^{\alpha}$ となる。)

この (15) の性質を $(k - \dot{k})$ 平面上に描画して調べることになる ($k - \frac{\dot{k}}{k}$ 平面上でも良い)。実際に描画をして Fig.1 を得る。

縦軸の $\dot{k}$ の値が k の動きを示す。k 軸の水平線より上にある場合は k は上昇，下にある場合は下落である。

k の動学方程式がこの平面上にあるということは k の値が $\dot{k}$ の動きを規定する事を示している (時間 t ではなく！)。

$0 < k < k^*$ に於いて $\dot{k} > 0$ である。詰まり k は上昇する。

[1] 自然対数の微分 ($y = \log x$ より $dy/dx = 1/x$)，及び合成函数の微分 $y = f(x), x = g(t)$ の時，$y = f(g(t))$ とすれば y は t の函数と解釈出来る。この時 $dy/dt = (dy/dx)(dx/dt)$ となる。これらを組み合わせると $d\log x(t)/dt = \dot{x}(t)/x(t)$ となる。

[2] 右辺は $\log\frac{X}{Y} = \log X - \log Y$ の性質を利用すれば出る。

逆に $k^* < k$ に於いて $\dot{k}$ である。詰まりは k は下落する。

成長の開始時点は一般的に資本が相対的に少ない状況だと考えられる。詰まり k が小さい状況である。

この場合，k は成長の開始時点では高い成長率を示し，徐々に成長率を下げながら k^* に向かっていく。k^* に到達すると k の成長率は停まってしまう。

これが基本的な Solow モデルの挙動である。成長の開始時に高い成長の伸びを示し，成長の進展とともに成長率が落ちついていく現実経済の様子を良く捉えている！

ただし重要な要素が抜けている。k^* で成長が止まってしまう (定常状態/steady state)。

この時の国全体の成長率はどうなっているのか？k^* で成長率が 0 になるので

$$\left.\frac{\dot{k}}{k}\right|^* = \left.\frac{\dot{K}}{K}\right|^* - \frac{\dot{L}}{L} = 0$$

が成立する。詰まりは

$$\left.\frac{\dot{K}}{K}\right|^* = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

である。資本ストックは人口成長と一致。

また $y = f(k) = k^\alpha$ より y(一人当たり GDP) の成長率も 0 である。 GDP は人口成長と同率で成長するも一人当たりの GDP は増えない，という結果を得てしまう。

しかし，先進国の経験でも豊かさは一人当たり GDP の長期に亘る継続的な成長でもたらされている。(短期的な資本蓄積の増加ではなく！)

3　技術進歩と長期的成長

Solow の成長会計の仕事などによって長期の成長の源泉は総要素生産性 (TFP・total factor productivity) の上昇に寄ることが明らかにされた。詰まり同じ K，L の投入に対してより高い生産 Y を補償するような要素の存在が示唆されたのである。

カルドアの定型化された事実 (Stylized Facts)　ケインズ派の重鎮だったカルドア (N. Kaldor) は過去一世紀に亘る先進資本主義国の経済成長の過程から以下の様な理論モデルが最低限踏まえるべき性質を提唱した。

国民総生産 Y も労働生産性 Y/L もほぼ定常的に成長し続けている

資本労働比率 K/L もほぼ定常的に成長し続けている

利潤率 r もほぼ一定の値を保っている

資本算出比率 K/Y もほぼ一定の値を保っている。

投資比率 I/Y と利潤分配率 rK/Y の間には正の相関があるが，前者が安定している限り後者もほぼ一定の値を取っている

総生産 Y も労働生産性 Y/L も経済の間で成長率には大きなバラツキがある

単純化された Solow モデルに於いて K/Y は定常状態で一定であるが $y = Y/L$，$k = K/L$ も一定になってしまい，定常的に成長するというカルドアの指摘と矛盾してしまう。

r 一定に加え利潤分配率 rK/Y も一定である事も容易に示すことが出来る。利潤分配率 (資本分配率) はコブ・ダグラス型の生産函数に於いては I/Y(Solow モデルに於いては $I/Y = S/Y = sY/Y = s$ で一定) の値に拘わらず常に一定。(現代では労働分配率の低下が示されているのでそこを分析する研究が多くなされているホットなトピックになっている。)

長期の成長の源泉は TPF であるのでそれを可能にする技術進歩をモデルに入れ込む事が次の課題となる。

技術革新と効率労働単位辺り変数　生産函数であるが，現実を踏まえると以下の様な形になる

$$Y = F(K, AL)(= K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}) \tag{16}$$

ここで A が技術水準。詰まり技術は労働効率性を上げる方向に働く。ハロッド中立型と云われる技術進歩のタイプである。現実には資本家が労働者の利用を削減しようとして労働生産性を上げるような技術を採用する事に対応し，理論的にはこの結果労賃＝限界生産性の利潤最大化の公式によって労賃が上昇していくことになる。

A に関して，さしあたって (人口成長と同様に) 技術進歩＝技術水準の自動的な (外生的な) 上昇を考える。

$$\dot{A}(t) = gA(t), \quad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g. \tag{17}$$

ここで g が外生一定の技術進歩率となる。

これらの修正を加えると Solow model は 3 つの変数と 3 本の式からなる

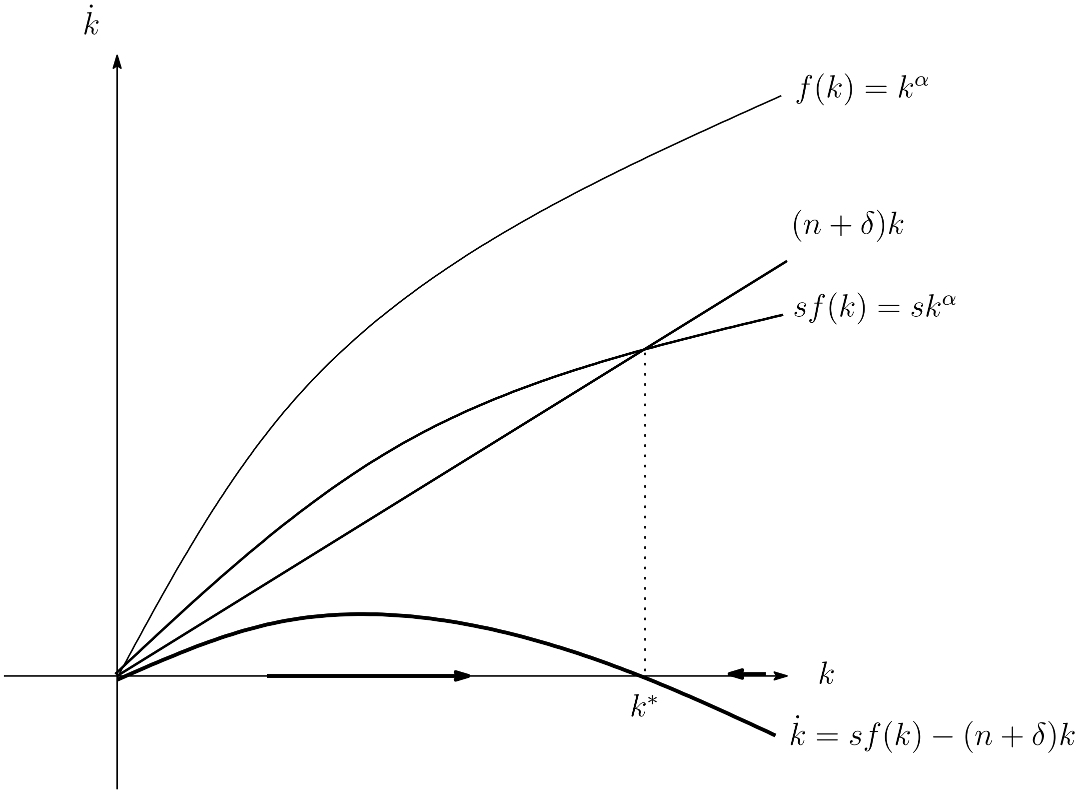

Figure 1: Solow モデルの k の動学の位相図

動学方程式体系を構成する：

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), A(t)L(t)) - \delta K(t) = K(t)^{\alpha} A(t)^{1-\alpha} L(t)^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (18)$$

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad (19)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t) \quad (20)$$

技術を導入前は定常状態で定数になる一人当たり量 $y = Y/L$ や $k = K/L$ で分析した。今回は A も入りそれも成長するので効率労働単位量で分析する。総計量を効率労働量 AL で割ってやることになる。

$$\tilde{y} = \frac{Y}{AL}, \qquad \tilde{k} = \frac{K}{AL}.$$

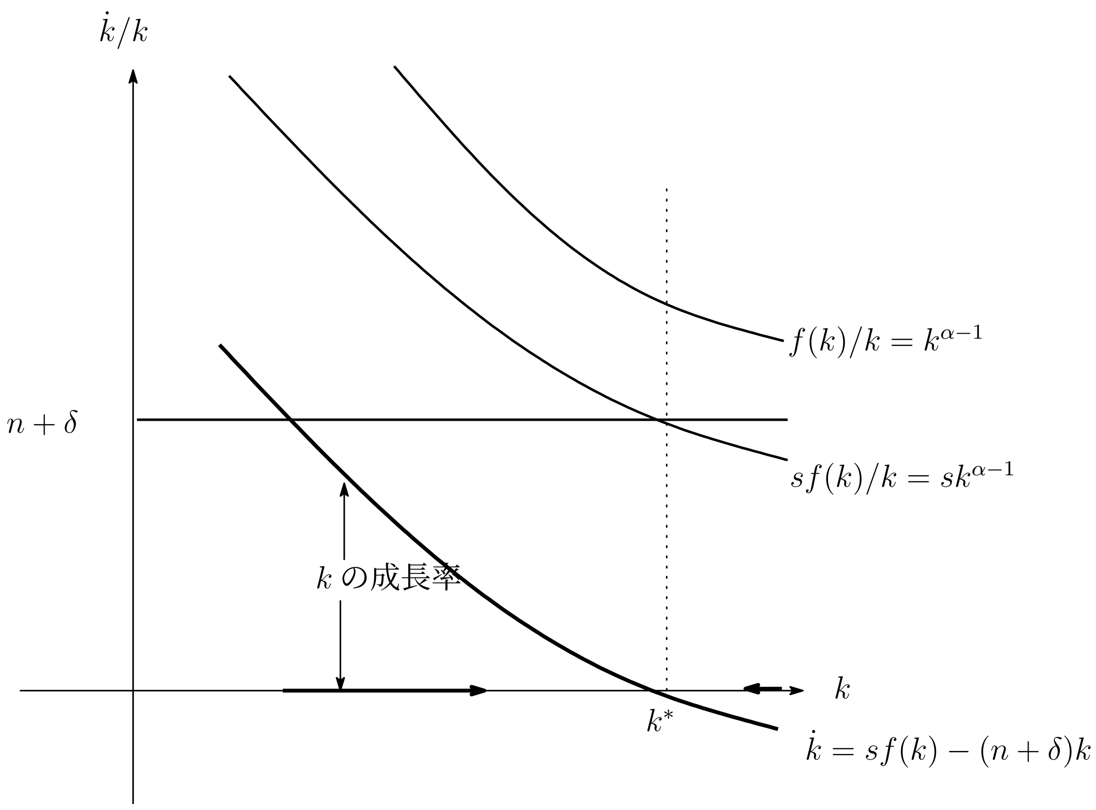

Figure 2: Solow モデルの k の動学の位相図 (縦軸が成長率)