A Simple Version of the Romer model

Shiro KUWAHARA

July 28, 2020

1　緒言

内生的成長理論 (Endogenous Groth Theory) 勃興の出発点となった劃期的な論文である Romer(1990) は中間財の種類が拡張していくモデルである。最も簡単な形として単純労働 L と人的資本 H の区別を無くし，更に中間財に使用する原料を耐久財としての資本から非耐久財としての最終財に変更したバージョンを先ず提示し，分析をする。その後分権経済と集権経済の違いを概観する。

この他，Benhabib et. al.(1994) が拡張した中間財の補完性を入れたバージョンや (定常状態しかない本形式では非決定性は出ない)R&D 函数を非線形な Jones(1995) technology に変更したものが重要であり，参考にされたい。

更に，簡略形として本稿と同じく L と H の区別を無くす一方で Romer(1990) の中間財を耐久財にする仮定を温存して遷移動学を出して分析したものが Arnold (1998) であり，R&D 投入を労働ではなく最終財にして分析したのが Barro & Sala-i-Martin (2003) である。これらも参考にされたし。

なお本稿は岩井 (1994) や D,Romer (2011) を読了したか併読中程度の読者を想定しており学部上級から大学院 1 回程度のマクロ経済学の基礎知識 (Solow model から Ramsey-Cass-Koopmans model) を前提としている。

2　最終財部門 (Final good sector)

労働と A 種類のタイプの中間財の群から最終財は作られる。完全競争。

生産函数：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x(i)^\alpha di, \quad \alpha \in (0,1) \tag{1}$$

where Y, L_Y, $x(i)$, A denote output, labor input in final goods production, ith intermediate goods input and number of intermediate goold.

最終財を muneraire にする。

最終財部門の利潤 π^Y ：

$$\Pi^Y = Y - wL_Y - \int_0^A p(i)X(i)di, \tag{2}$$

此処で w, $p(i)$ は実質賃金と第 i 部門での需要である。

利潤最適化の為の一階の条件：

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = 0. \tag{3}$$

これらを計算してみると

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = \frac{\partial Y}{\partial L_Y} - w = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = \frac{\partial Y}{\partial X(i)} - p(i) = 0. \quad i \in (0, A) \tag{5}$$

(4) と (5) に (1) を代入して計算する：

$$(1-\alpha)L_Y^{-\alpha}\int_0^A X(i)^{\alpha}di - w = 0, \tag{6}$$

$$\alpha L_Y^{1-\alpha}X(i)^{\alpha-1} - p(i) = 0. \tag{7}$$

3 中間財部門 (Intermediate good sector)

生産構造 (最終財 η 単位で中間財 1 単位生産出来ると仮定する)：

$$X(i) = \frac{1}{\eta}Y(i), \quad \eta > 1 \tag{8}$$

此処で $Y(i)$ は第 i 部門で使用される最終財。

第 i **部門の中間財部門の利潤** $\pi(i)^M$ ：

$$\Pi(i)^M = p(i)X(i) - Y(i) = p(i)X(i) - \eta X(i). \tag{9}$$

中間財部門は発明者 (後から説明) から購入した知的財産権 (特許) を背景に独占的に供給出来る。最終財は購入しないよりも購入した方がマシになるので購入するが，価格とともに購入量は減少。その関係は最終財の最適化条件 (7)($p(i) = \alpha L_Y^{-\alpha}X(i)^{\alpha-1}$) で示される。

最適化問題は

$$Max\,\Pi(i)^M, \quad s.t. Eq.(7)$$

より以下の形となる：

$$\max_{X(i)} \quad \Pi\big(X(i)\big)^M = \alpha L_Y^{1-\alpha} X(i)^\alpha - \eta x(i). \tag{10}$$

よって一階の条件は

$$\frac{\partial \Pi(X(i))^M}{\partial X(i)} = \alpha^2 L_Y^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - \eta = 0. \tag{11}$$

これより最適な行動下での中間財生産：

$$X(i) = \left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y. \tag{12}$$

(12) 式を (7) 式に代入して中間財の独占価格：

$$p(i) = \frac{\eta}{\alpha}(> 1) \tag{13}$$

を得る。$p(i) > \eta$(単位コスト＝限界コスト) なので独占価格付けとなっている。(完全競争ではない＝パレート最適ではない＝政策介入の余地がある) 分権経済の非パレート最適性は後に計画経済下での経路を解いてその異同を調べることとする。

また各企業は対称。$X(i) = \tilde{X}$，$p(i) = \tilde{p}$，$\Pi(i) = \tilde{\Pi}$ と書ける。

4　研究開発部門 (R&D sector)

知識総生産函数 (R&D 函数)：

$$\dot{A} = \delta A L_A, \quad \delta > 0, \tag{14}$$

where $\dot{Z} \equiv \frac{dZ(t)}{dt}$, and L_A denotes labor input on R&D sector.

(14) は Romer 型の R&D 函数であり，特徴としては A と L_A に関して線形。

$\dot{A}$ は新しく発明される知識であり１つの特許でカヴァーされるとする。A は社会全体の知識量なので $\dot{A}$ も社会全体の新知識の量。

研究開発部門は自由参入。j 社の確保する特許は全体の R&D 投入量に対する j 社の投入量の比率に比例する。全体の R&D 投入 (労働) 量 L_A に対して j 社の労働投入量を $L_A(j)$ とする。この時利潤は以下の如し。

R&D 部門の利潤 $\pi(j)^R$ ：

$$\pi(j)^R = \dot{A}\,\tilde{V}\,\frac{L_A(j)}{L_A} - wL_A(j), \tag{15}$$

where $\tilde{V}$ denotes １つの特許によって得られる独占利潤流列の現在価値，詰まり発明成功による価値 (収入の総和)：

$$\tilde{V} = \int_0^\infty \tilde{\Pi} e^{-\int_0^t r(s)ds} dt \tag{16}$$

利潤最大化の一階の条件：

$$\frac{\partial \pi(j)^R}{\partial L_A(j)} = \dot{A}\,\tilde{V}\frac{1}{L_A} - w \tag{17}$$

$L_A(j)$ に関して線形なので一階の条件だけでは生産量は決まらない。

更に R&D 活動には自由参入なので利潤が正である限り無限の企業が参入してきてしまう。从って R&D 活動が行われる ($L_A > 0$) 時には自由参入の元で利潤ゼロ条件 ($\pi(j)^R = 0$) が満たされなくてはならない。

また一階の条件が負 ((17)< 0) の時は，全 R&D 活動が停止する ($L_A = 0$) ことになる (固定費用がないので損益分岐点＝操業停止点)。

R&D の発生条件：

$$\dot{A}\,\tilde{V} \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \right\} wL_A \Longleftrightarrow L_A \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \end{array} \right\} 0. \tag{18}$$

ここで $\tilde{V}$ はこの経済の資産。以下の資産方程式 (asset equaion)or 無裁定条件式 (no-arbitrage equation) を満たす

$$r\tilde{V} = \dot{\tilde{V}} + \tilde{\Pi} \tag{19}$$

5　家計 (household)

通常の家計を想定。無限期存続して一定の主観的割引率と消費からのみ効用を得る瞬時的効用函数を持つとする：

$$U = \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0 \tag{20}$$

通常の最適化問題を解いて通常の Euler 方程式を得る：

$$\theta\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho. \tag{21}$$

6　マクロ均衡

(12) 式を (1) 式に代入：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \left(\left[\frac{\alpha^2}{\eta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \right)^\alpha di = \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL_Y \tag{22}$$

ここで $\int_0^A (const)di = (const)\int_0^A di = (const)[\,i\,]_0^A = (const)A$ であることに注意。

同様に (12) を (6) に代入：

$$w = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A \left(= (1-\alpha)\frac{Y}{L_A} \right) \tag{23}$$

また (12)，(13) を (9) に代入：

$$\tilde{\Pi}^M = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \eta \tilde{X} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \eta \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y = (1-\alpha)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{Y}{A}. \tag{24}$$

この簡略化されたモデルでは資本は含まれない。最終財は中間財か消費財に利用される。

$$Y = C + \eta X \tag{25}$$

ここで $C = Lc$ であり，各部門の対称性より $X \equiv \int_0^A X(i)di = A\tilde{X}$。

(12) と (22) より

$$\begin{aligned} C = Y - \eta X &= \left[\left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \eta \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] AL_Y \\ &= \left(1 - \alpha^2 \right) \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL_Y = \left(1 - \alpha^2 \right) Y. \end{aligned} \tag{26}$$

(18) より R&D が行われる均衡では (14) を代入して

$$\delta A L_A \tilde{V} = w L_A. \tag{27}$$

これに (23) を代入して以下を得る：

$$\tilde{V} = \frac{w}{\delta A} = \frac{1-\alpha}{\delta} \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{28}$$

また労働賦存は外生・一定。L は定数。$L_Y = uL$，$L_A = (1-u)L$ と書き直すと変化するのは u の部分のみ。

7　動学方程式の導出

ここまで出て来た動学方程式は (14)，(19) そして (21)。対応する動学変数は $A, \tilde{V}, c$。５節の表記を利用してこれらを書き換えていく。

(21) に $C = cL$，$L_Y = uL$ 及び (14)，(26) を代入。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{C}}{C} - \underbrace{\frac{\dot{L}}{L}}_{\dot{L}=0} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{u}}{u} = \delta(1-u)L + \frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{\theta}(r-\rho). \tag{29}$$

A，$\dot{A}$，c と $\dot{c}$ の情報が u と $\dot{u}$ と r で書き換えられた。

(19) に $\tilde{V}$ と $\tilde{\Pi}$ の情報を入れていく。

(28) より $\dot{\tilde{V}} = 0$，(24) を (19) に代入し，以下を得る：

$$r = \frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{V}} = \frac{(1-\alpha)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{Y}{A}}{\frac{1-\alpha}{\delta}\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{(1-\alpha)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}uL}{\frac{1-\alpha}{\delta}\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \Gamma(\alpha)\delta uL \tag{30}$$

但し此処で $\Gamma(\alpha) \equiv \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ であり，この Γ は $\Gamma(\alpha) \in (0,1) \quad \text{for} \quad \alpha \in (0,1)$ 及び $\Gamma'(\cdot) > 0$ を満たす。$\tilde{V}$ と $\dot{\tilde{V}}$ の情報は r と u の情報に置き換えられた。

(29) と (30) から r を消去すると u の動学方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta(1-u)L + \frac{\dot{u}}{u} &= \frac{1}{\theta}\left(\Gamma(\alpha)\delta uL - \rho\right), \quad \text{namely,} \\ \dot{u} &= \left[\frac{1}{\theta}\left(\Gamma(\alpha)\delta uL - \rho\right) - \delta(1-u)L\right]u. \end{aligned} \tag{31}$$

この経済 (簡略化された Romer model) では動学情報は１次元に集約される！ Solow model でやった時の様な手法 ($u - \dot{u}$ 平面上での分析) が利用可能。

8　定常状態と動学分析と非成長の罠

定常状態　(31) より定常状態の u たる u^* が導出できる。$u^* \in (0,1)$ の条件が満たされるもとで $\dot{u} = 0$ を成立させる u なので以下を得る：

$$u^* = \frac{\rho + \theta\delta L}{(\Gamma(\alpha) + \theta)\,\delta L} \tag{32}$$

定常状態の労働配分比率が出たところである。これより (14) に $L_A = (1-u^*)L$ を代入して定常状態の成長率を得る：

$$g^* = \frac{\dot{A}}{A} = \delta(1-u^*)L = \frac{\Gamma(\alpha)\delta L - \rho}{\Gamma(\alpha) + \theta}\left(= \frac{\delta L - \Lambda\rho}{\Lambda\theta + 1}\right) \tag{33}$$

但し $\Lambda = \Gamma^{-1}$ でこの Λ を用いた表現方法だと Romer (1990) の p.S92 の (13) 式とよく対応している事に注意。

Romer model の劃期的な点は，此迄 g は外生に与えられて一定であった。この場合，g の値が，モデル内の δ，L，ρ，α と云ったパラメータによって内生的に導出されている。

(32) を $L_Y = uL$ に注意して (22) に代入：

$$Y^* = \left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A \frac{\rho + \theta\delta L}{(\Gamma(\alpha) + \theta)\,\delta} \tag{34}$$

また u^* を通じて g^* と $\tilde{Y} \equiv Y/A$ は以下の様に結びつけられる：

$$g^* = \delta L - \left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tilde{Y}^*.$$

詰まり成長と生産のトレードオフである。

動学分析　動学的性質はどうなっているのか？

(31) を描画してみると Fig.1 の様になり，u^* は不安定点であることが判る。最初から u^* を選択して永久にそこに居続けるしかない。

このモデルでは遷移動学 transition dynamics は存在しないことが判る。資本を引っこ抜くことに寄る効用は此処にあって安定性分析の省略が可能となる。また他の要素を入れる余地が出てくる。

非成長の罠 no growth traps　成長しないケースを Romer model は分析することが出来る。

$u^* \in (0, 1)$ が実行可能 feasible 条件となる。(32) の形状より $u^* > 0$ で負にはならないけど $u^* > 1$ は取り得る。その場合 $u^* = 1$ となり $g^* = 0$ が均衡 (定常状態にも) となる。

その条件を求めてみる。$u^* > 1$ より

$$(r^* =)\Gamma(\alpha)\delta L < \rho. \tag{35}$$

研究開発の効率性 δ が小さかったり，人口規模 L が小さかったり，主観的割引率 ρ 大きかったりすると発生する。$\Psi(\alpha) \equiv \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ とすると $\Psi'(\alpha) > 0$ なので α が小さい (労働シェアが大きい) と非成長が発生する可能性が高まる。

9　計画経済

計画経済を考える。政府は benevolent で almighty だと仮定する。

従って，(1)，(8)，(14) の制約のもと (20) を最大化する：

$$\max_{X(i),c,u} \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \qquad s.t.\quad (1),\ (8),\ (14).$$

ハミルトン函数は以下の様になる：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_Y \left\{ (uL)^{1-\alpha} \int_0^A X(i)^\alpha di - Lc - \eta \int_0^A X(i) di \right\} \\ &+ \lambda_A \delta A(1-u)L. \end{aligned} \tag{36}$$

これを解く。先ず瞬時的な最適化の条件を出す。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X(i)} = \lambda_Y \left\{ \alpha (uL)^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - \eta \right\} = 0, \tag{37}$$

(37) より直ちに

$$X(i) = \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} uL. \tag{38}$$

を得る。

これを (36) に代入して

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_Y \left\{ (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(uL) - Lc \right\} + \lambda_A \delta A(1-u)L. \tag{36$'$}$$

これを解いて

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\theta} + \lambda_Y(-L) = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \lambda_Y \left\{ (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} AL \right\} + \lambda_A \delta A(-1)L = 0, \tag{40}$$

$$\rho \lambda_A - \dot{\lambda}_A = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \lambda_Y (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (uL) + \lambda_A \delta (1-u)L. \tag{41}$$

(38) と (12) を見比べることで分権経済と集権経済の違いが見て取れる。配分 $uL = L_Y$ の違いを別としても独占価格付けで限界費用よりも高い価格が付く分 (12) の係数が $\alpha^2 (< \alpha)$ となって小さくなっており，中間財需要が小さくなっていることが判明する。

(38) を (1) に代入して

$$Y = \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(uL) \tag{42}$$

分権と集権の違いは (22) と比較されたし。

(38) より：

$$\lambda_Y(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \lambda_A\delta \tag{43}$$

また (38) に (43) を代入して

$$\rho - \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \delta L \tag{44}$$

(43) に (39) を代入して

$$\frac{c^{-\theta}}{L}\left\{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} = \lambda_A. \tag{45}$$

これより L も定数なので変数は c と λ_A のみ。よって以下を得る：

$$-\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \theta\frac{\dot{c}}{c}. \tag{46}$$

(46) を (41) に代入すると最適成長経路でのオイラー方程式を得る：

$$\theta\frac{\dot{c}}{c} = \delta L - \rho \tag{47}$$

分権版の Euler 方程式は (21) で与えられるが分権経済での利子率に相当する項 $\Gamma\delta uL$ が δL となるが，知的資本生産に対する知的資本ストックの限界効率 ($\frac{\partial\dot{A}}{\partial A}$) となっている。$u,\Gamma\in(0,1)$ より，利子率が従って成長率が最適より分権経済の場合は低くなる事が判る。

(38) を $cL+\eta X = Y$ に入れると

$$c = \left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)\,uA \tag{48}$$

(48) より

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{u}}{u} + \delta(1-u)L \tag{49}$$

(47) と (49) より経済は (再び)u の動学方程式に纏められる：

$$\rho + \theta\left[\frac{\dot{u}}{u} + \delta(1-u)L\right] = \delta L, \quad \text{namely,}$$
$$\dot{u} = \left[\frac{1}{\theta}(\delta L - \rho) - \delta(1-u)L\right]u \tag{50}$$

(31) 式との対比に注意。矢張り分権時と同様に，u の動学方程式は不安定であり最初から均衡点 u^* に留まり続けるのが最適となる。

$\dot{u}=0$ と置く集権経済の均衡労働配分を u^{**} と置くと以下になる：

$$u^{**}=\frac{\rho-(1-\theta)\delta L}{\theta\delta L} \tag{51}$$

(32) と (51) の比較が分権と集権の差。$1>\Gamma(\alpha)$ より集権経済の均衡 u の分母が大きくなっているので集権の方 (最適成長のケース) が生産が小さくまた成長率は高くなる。

また (14) と (51) より，

$$g^{**}=\frac{1}{\theta}(\delta L-\rho)(>g^*). \tag{52}$$

$g^{**}>g^*$ は $\Gamma(a)\in(0,1)$ より分母は g^* がより大きく分子は g^* がより小さいから明らかである。このこと及び $g=\delta(1-u)L$ から以下を得る：

$$u^*>u^{**}. \tag{53}$$

$g^{**}>g^*$ より十分時間が経てば $c(t)^{**}>c(t)^*$ は明らかである。今，同じ技術水準に対する分権と集権の消費の大小を考える。(26) と (48) より

$$\frac{\tilde{c}^*}{\tilde{c}^{**}}=(1+\alpha)\Gamma(\alpha)\frac{u^*}{u^{**}} \tag{54}$$

此処で $\tilde{c}\equiv c/A$ である。数値計算をしてみると $(1+\alpha)\Gamma(\alpha)\in(0,1)$ for $\alpha\in(0,1)$ で (53) より $u^*/u^{**}>1$ なので大きさは ambiguous である。

References

[1] Arnold, L. G. (1998) "Growth, welfare, and trade in an integrated model of human-capital accumulation and research," *Journal of Macroeconomics* Volume 20, Issue 1, Pages 81-105

[2] Barro, R. J., & X. Sala-i-Martin (2003) *Economic Growth* 2nd Edition, MIT Press

[3] Benhabib, J., R. Perli, and D. Xie. (1994) "Monopolistic competition, indeterminacy and growth" *Ricerche Economiche* 48, 279-298.

[4] Jones (1995) "R&D-based model of Economic Growth" *Journal of Political Economy* Vol.103 No.4 759-784.

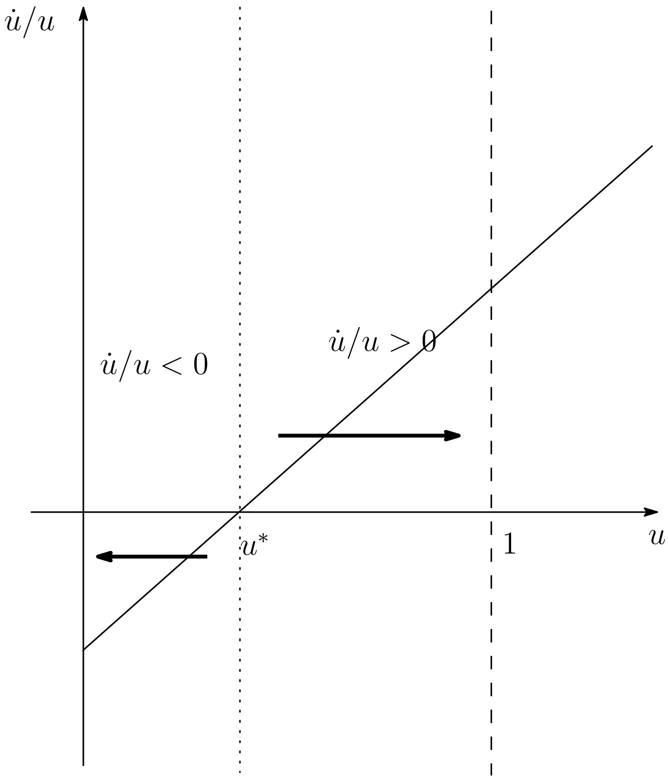

Figure 1: Dynamics of u

[5] Romer, D., (2011) *Advanced Macroeconomics* The Mcgraw-hill Series in Economics.

[6] Romer, Paul M., (1990) "Endogenous Technological Change" *Journal of Political Economy* Volume 98, Number 5, Part 2 pp. S71-S102

[7] 岩井 克人 (1994) 「経済成長」　岩井克人・伊藤元重編『現代の経済理論』所収　東大出版会