The Ramsey model

Shiro KUWAHARA

初稿：21.6.10
修正：July 27, 2025

1 Introduction

Ramsey model もしくは Ramsey-Cass-Koopmans model は Ramsey (1928) の先駆的な研究を第二次大戦後の数理経済学の発展にともない Cass(1965), Koopmans(1965), Uzawa(1965) によって現代経済学に取り入れられることになり，現在でもマクロ経済学の異時点間の効用最大化の基本的な枠組みとして広く使用されている。鈴木 (2003) は，基本的な枠組みは Ramsey(1928) によって完成されていて，ただその相違点として「至福」概念と社会的な効用割引率の有無」があると指摘している。

本項では２章で Ramsey model を概説し，３章ではその分権版である新古典派成長モデルと概説する。

2 Ramsey model

長期に亘る (異時点間の intertemporal) 意志決定を取り扱う。

毎期の貯蓄と消費の選択を最適化する行動を入れる事が出来る。

先ずは集権経済 (計画経済)command economy で社会計画者 social planner の問題を解いた後に分権経済 (市場経済)decentralized economy(market economy) を分析する。

全知全能 almighty で善意の benevolent 政府 government を想定する。→実際に国民のニーズ (効用 utility) を正確に収集し経済厚生 welfare を最大化する様に行動し，しかもそれを実際に実行可能な政府。

効用の構造
代表的個人 (家計)representative agent(household)

→多種多様な個人・家計の平均を取り，その代表値を持つ同質の個人からのみなると仮定する

これが正当化されるのは，簡略化の為でもあるし，消費は最終財１種類の消費量に還元され，また消費者のパラメーターは二つ (リスクに対する態度と現在と将来のウエイト付け) に絞られるのでその都合２種類に関して国民性みたいなもので統一が取れていると考えられなくも無い。勿論，分析対象に於いて異質性が重要になってくる場合は勿論異質性を入れてやるべきである (例えば世代の違い→世代重複モデル)。

具体的に需要構造を以下の様に式で示す。

■離散系

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\beta)^t} u(c_t) \tag{1}$$

■連続系

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{2}$$

効用の構造の特徴は，主に以下の三つである。

時間に関して加法分離 (additive separable)，t 期の消費は t の効用にのみ影響する，と仮定する。これによって各期の消費から得られる効用は瞬時的効用函数 (instantaneous utility function)$u(c)$ と呼ばれる各期の瞬間の消費を瞬間の効用に結ぶ付ける函数で現すことが出来る。

現在の効用の方が将来の効用よりもより大事である。これを割引 discount と云う。将来 (より大きい t) に対して効用をより小さくする部分を割り引き因子と云い下の例だと $\frac{1}{(1+\beta)^t}$ や $e^{-\rho t}$ がそれに当たる。特に ρ を主観的割引率 subjective disucount rate と云う。

将来の効用のウエイトは無限に小さくなっていくが，無限期先迄配慮はする (無限計画時間視野 infinite planning time horizon) 王朝モデル (dynasty model) と呼ばれる設定。

この効用を制約の下で最大化するのが目的となる。この状況での制約は異時点間 (intertemporal) の予算制約である。

異時点間の予算制約としては異時点間を持ち越せるもの，貨幣や資産を導入する必要がある (これがない場合，毎期毎期の最大化に帰着し問題は簡単になるが現在と将来のトレードオフは分析出来ない。)。

長期の分析であるので貨幣の中立性・超中立性を仮定する。この許では新古典派的な貨幣ヴェール観が成立し，貨幣は交換手段としてのみ存在し恰も貨幣がないかの様な世界のもとで経済の動きを記述出来る。

今，資本を K とすると，消費と貯蓄の選択が資本の蓄積に影響を与える資本蓄積の関係式より再び以下を得る。

$$Y = C + S \underbrace{=}_{I=S} C + I \underbrace{=}_{\dot{K}=I-\delta K} C + \dot{K} + \delta K \tag{3}$$

これを変形すると

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{4}$$

となる。$Y = C + S$ より $S = Y - C$ であるから $S = sY$ の Solow モデルで出ていた資本蓄積式と基本的には同じものである。Solow ではこの s が固定だったが今回は C を意識的に変えることで s を操作出来るという点である。

ここで C は社会全体の消費量，効用函数の中の c は一人当たり消費量であるから両者の関係は，再び人口と労働量を同一視して $C = cL$ である。

またここで生産と人口成長に関しては Solow モデルと同じ構造を踏襲し，$Y = F(K, L)(= K^{\alpha}L^{1-\alpha})$，$\dot{L} = nL$ とする (almighty な政府としても技術問題の生産函数や個々人の選好の問題の人口には介入出来ないとする。)

この許で (4) は以下の様に変形される。

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k(t) \tag{5}$$

此処で再び $k = K/L$ であり，最終財生産函数の一次同次性より $y = Y/L = f(k)$ が成立する。

以上で準備は終了。中央計画当局の最適化問題 $(\mathcal{P})$ は以下の様な一人当たり資本ストック量 k と一人当たり消費量 c を変数とする問題に設定される。(これを社会計画者の問題と呼ぶ。)

$$(\mathcal{P}) \quad \max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k(t) \tag{7}$$

となるこの様な時間を通じた最適化問題を解く解法は既に知られていてそれを適応すればよい。ポントリャーギンの最大値原理やベルマンのダイナミックプログラミング (動的計画法) を使って解くことが出来る。ここでは最大値原理が良く使われる。

定理　問題 $(\mathcal{P})$ の最適解は以下で設定される当該期価値 (current value) ハミルトニアン (ハミルトン函数)[1]

$$\mathcal{H}(t) = u(c(t)) + \lambda(t)\{f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t)\} \tag{11}$$

の最大化条件である一階の条件より，以下を得る。

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial c(t)} = 0, \quad \text{namely} \quad u'(c(t)) = \lambda(t) \tag{12}$$

$$\rho\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial k(t)} = \lambda(t) f'(k(t)). \tag{13}$$

これらよりオイラー方程式 (Euler equation またはケインズ=ラムゼイ公式とも)

$$\varepsilon(t)\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \rho - n - \delta \tag{14}$$

と横断面条件 (横断性条件 transversality condition) によって最適解は条件付けられる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0 \tag{15}$$

但し此処で λ は効用のシャドウプライスであり当該期価値ラグランジュ乗数であり，$\varepsilon = -u''(c)c/u'(c)$ は限界効用の消費弾力性である。

横断面条件は王朝モデルの本モデルに於いて，無限期先に有限価値の資本ストックを残しておくことは無駄 (効用は効用函数の形状より消費からのみ得られるのに，消費しきれない程の資本ストックを余らせておく事になる) であるのでそれを排除している。

オイラー方程式は経済が動いていく上で満たすべき条件であり，左辺は消費を通じた効用の異時点間の限界代替率に対応し，右辺は生産をめぐる限界変形率に対応している。

---

[1]同様に現在価値 (present value) ハミルトニアンは

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = u(c(t))e^{-\rho t} + \tilde{\lambda}(t)\{f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t)\} \tag{8}$$

の様に与えられる。この場合，一階の条件として以下を得る。

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(t)}{\partial c(t)} = 0, \quad \text{namely} \quad u'(c(t))e^{-\rho t} = \tilde{\lambda}(t) \tag{9}$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(t)}{\partial k(t)} = -\tilde{\lambda}(t) f'(k(t)). \tag{10}$$

結局 $\lambda(t)e^{-\rho t} = \tilde{\lambda}(t)$ が成立してどちらでも同じである。

また簡略化の為に(定常状態で c が成長する技術進歩が含まれている時には定常成長を得る為に)$\varepsilon(t)=\theta$ と時間を通じて一定であると仮定する。この仮定は瞬時的効用函数 $u(c)$ が以下の様な形をしていることを示唆する。

$$u(c)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta},\quad \theta>0$$

この形の効用函数の θ は異時点間の代替の弾力性の逆数であり，また相対的リスク回避度一定 (CRRA) 型でもある。分子に -1 が着いているのは $\theta\to1$ の時に ロピタルの定理を適応して $u(c)=\log c$ をも含める用にするためである。

これで k と c からなる経済の動きを示す動学方程式として (5) と (14) が得られた。これらはいずれも k と c のみを変数に含むので経済全体の動きがこれで描写可能である。

以上を纏めると，この経済の動学は２本の動学方程式から描写可能

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t)(:=\phi(k,c)) \tag{16}$$

$$\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=f'(k(t))-\rho-n-\delta \tag{17}$$

２本目は $\dot{c}$ に就いて解けば

$$\dot{c}(t)=(1/\theta)\big\{f'(k(t))-\rho-n-\delta\big\}c(t)(:=\psi(k,c))$$

概念的に書けば

$$\dot{k}=\phi(k,c) \tag{18}$$

$$\dot{c}=\psi(k,c) \tag{19}$$

となり，この二つの変数が二つの動学方程式を通じて時間変化が内生的に決定されるので動きを規定 (導出) することができる。

ここで k と c の動きは勿論

$$\dot{k}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0\Longleftrightarrow k:\left\{\begin{array}{l}\text{増える}\ (\uparrow)\\\text{一定}\ (\rightarrow)\\\text{減る}\ (\downarrow)\end{array}\right. .$$

勿論 c に就いても同様。 全部で $\{k,c,\dot{k},\dot{c}\}$ の 4 要素あるので 4 次元必要だが困難。$\{k,c\}$ 平面を用い，$\dot{k}$ と $\dot{c}$ はその $\{k,c\}$ 平面上の矢印で描く事にする。

先ずは

$$\dot{k}=f(k)-c-(n+\delta)k\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0\Longleftrightarrow c\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}f(k)-(n+\delta)k.$$

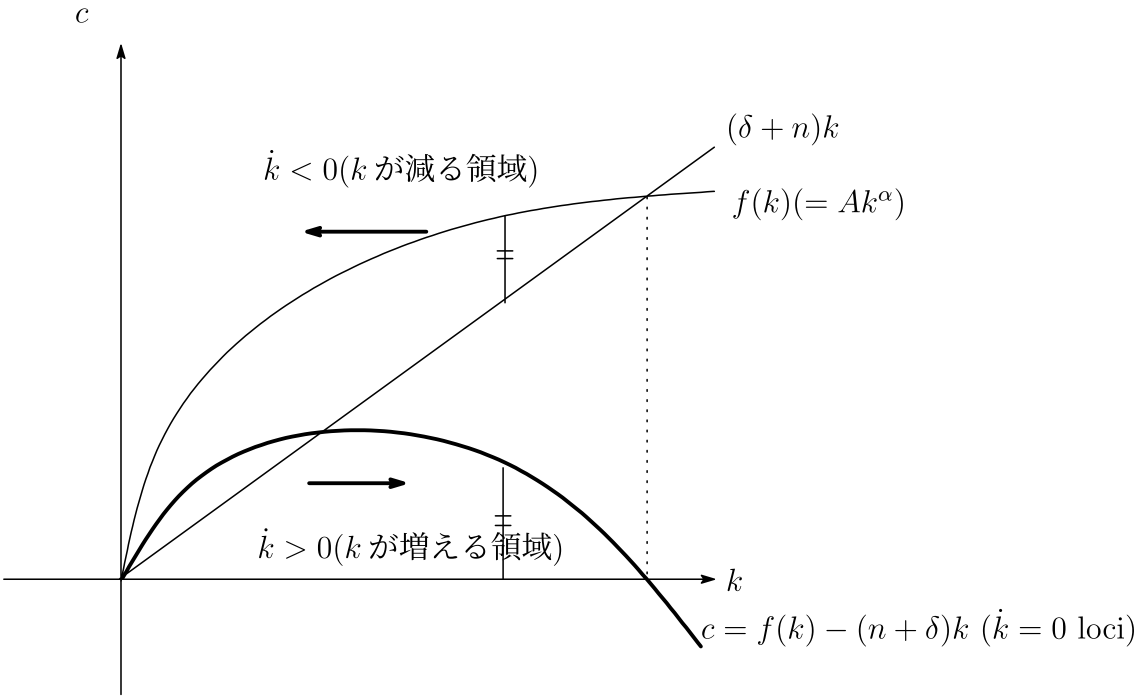

Figure 1: k の動学

となる。詰まり

$$c\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}f(k)-(n+\delta)k. \Longleftrightarrow k:\left\{\begin{array}{l}\text{増える}\ (\uparrow)\\ \text{一定}\ (\rightarrow)\\ \text{減る}\ (\downarrow)\end{array}\right. .$$

である。大量の消費が資本蓄積を妨げ逆は逆を表現していることに注意。

この関係式をグラフに落としてみる。

c に関しても同じ事が出来る。

$$f'(k)=\alpha Ak^{\alpha-1}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\rho+n+\delta. \Longleftrightarrow c:\left\{\begin{array}{l}\text{増える}\ (\uparrow)\\ \text{一定}\ (\rightarrow)\\ \text{減る}\ (\downarrow)\end{array}\right. .$$

この条件は c の動学を規定するが c が含まれていないので k の値が c の成長率を決める事になる。

$$\alpha Ak^{\alpha-1}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\rho+n+\delta. \Longleftrightarrow k\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}\left(\frac{\alpha A}{\rho-n-\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(:=k^{\$}).$$

$f(k)=Ak^{\alpha}$ の特定化の元では特設解けるてしまうが，一般的な形でも $k^{\$}:=\arg\{k|f'(k)=\rho+n+\delta\}$ と定義すれば基本は同じである。

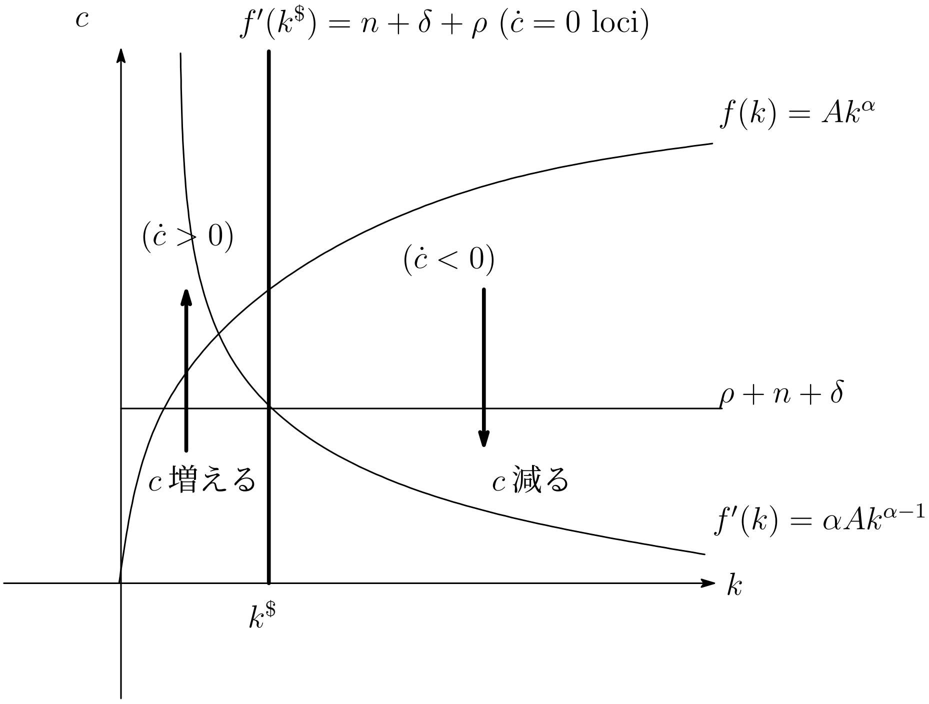

Figure 2: c の動学

そして上２条件を纏めると以下の条件を得る。

$$k \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} \right\} k^{\$} \Longleftrightarrow c : \left\{ \begin{array}{l} \text{増える} (\uparrow) \\ \text{一定} (\rightarrow) \\ \text{減る} (\downarrow) \end{array} \right. .$$

この二つの動きは実際は同時進行なので組み合わせて考える必要がある。

併せると位相図と呼ばれる以下の様な c と k がどちらに動くかを示す図が得られる。

この図の矢印の方向に従って経済は動いていく。矢印を繋げると図の様になる。現在に於いて k は所与。c は自由に選べる。

k の値に拘わらず初期の c_0 を選ぶと経済がやじるに導かれて A か B か S へ収束する converge 経路に乗る。

[B] は有限期間の内に k を消費し尽くして経済の持続可能性が破綻してしまう経路。[A] は長期的に消費を犠牲にして k を溜め込んで行く経路。破綻はしないが効用をもたらさない k のみが増えて c が漸減していく経路。横断面条件によって弾かれる。

最適解としては [S] に収束する経路を選び (遷移過程)，[S] に到着後はそこに留まる (定常状態) のがベストとなる。

これは成長率の振る舞いは Solow と似ていて経済発展初期の高成長とそ

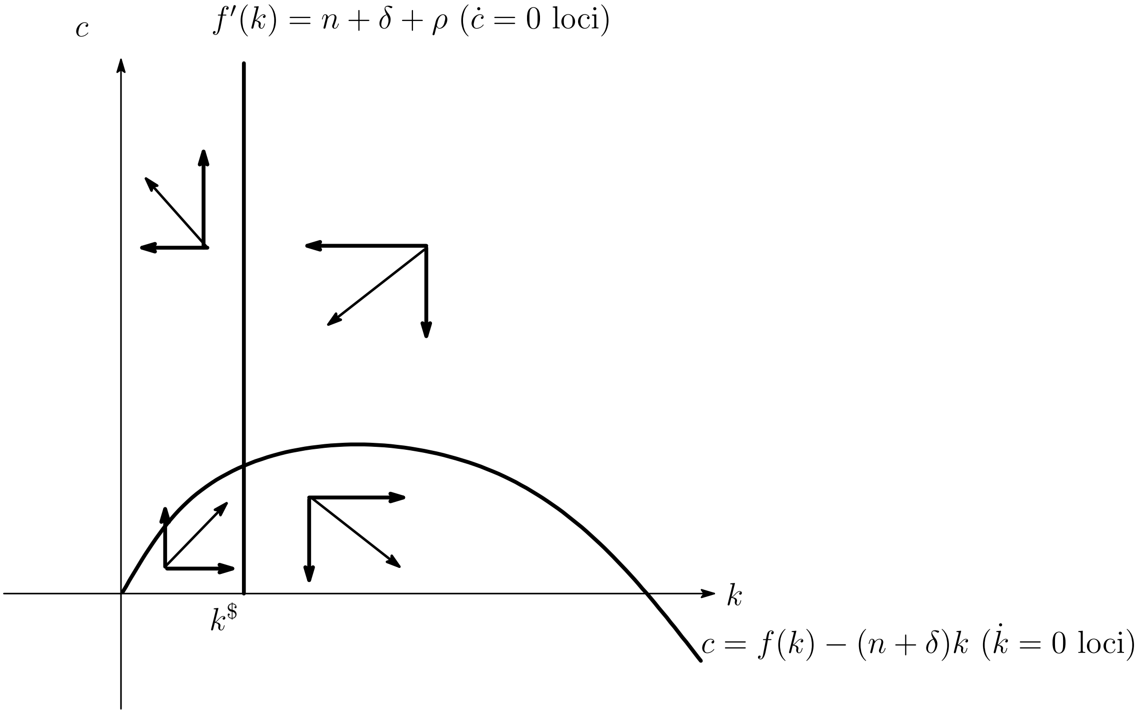

Figure 3: 位相図

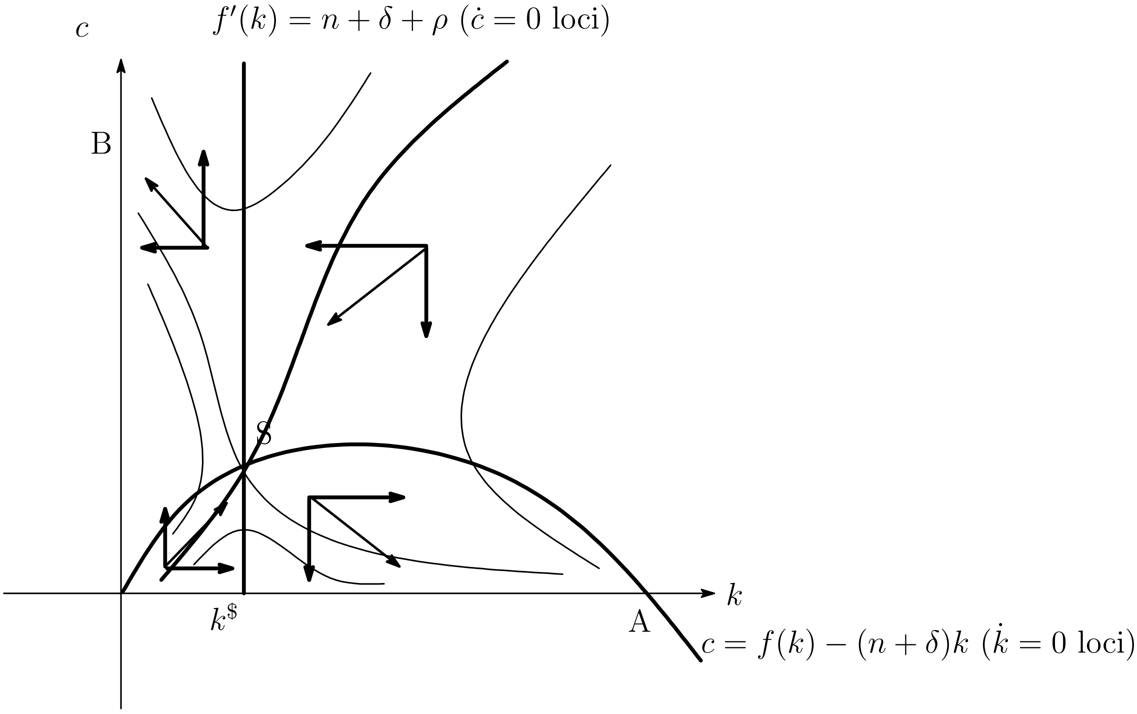

Figure 4: 位相図

の後の安定成長を記述する他，貯蓄に関するマイクロファンデーションも含んでいる。

3　新古典派成長モデル

此処まで見て来たRamsey(-Cass-Koopmans) モデルは集権経済モデルであり，一種の思考実験であった。ここでは現実経済を反映する分権経済化を検討する事にする。

　結論を先取りすると分権経済 (市場経済) のパフォーマンスは集権経済 (計画経済) に完全に一致することになる。これはミクロ経済学の新古典派の一つの結論である競争経済はパレート最適であると云う厚生経済学の基本定理のマクロ経済学版 (動学経済学版) なのである。

　実際，今から導入される市場経済 (分権経済) には外部不経済などの歪み distortion が存在せず，永続的に存続する家計は現在から将来までを計画に入れて行動をすることによりこれが可能となっている。

　分権経済なので経済主体 (経済上の選択をする意志決定主体) は複数存在する (Ramsey は政府が全て意志決定していた)。簡略化の為に消費者 (家計) と生産者 (企業) のみからなり，外部性などが存在しない経済を考える。

3.1　企業の最適化行動

企業は生産技術を持ち，生産要素を購入して利潤を最大化しようと行動する。但し，完全競争下なのでこの生産技術は公知であり，その技術を用いて誰もが参入出来る。その結果，企業の利潤は常に零で均衡する事になる。即ち生産された付加価値は資本家 (資本保有者＝この場合は家計) と労働者 (労働力供給者＝この場合はやはり家計) に帰属することになり，新古典派的な企業ヴェール観がここでも成立している事になる。

　またマルクス経済学やケインジアン的な階級構造も捨象されている点にも注意が必要である。働かず資本収入のみで生活する資本家階級と貯蓄をする余裕もなく生存賃金でその日暮らしをする労働者階級ではなく，(時には (資本家ではなく) 経営者として時には労働者として) 働き消費も貯蓄もする (現代的な) 代表的家計を想定するのである。

　企業の生産技術は生産函数によって記述され，それは引き続き $Y = F(K, L)(= K^{\alpha}L^{1-alpha})$ を想定する。

　価格の歪みや貨幣効用と云ったものを差し当たって考えないので価格水準は正規化 (常に価格水準が 1 に固定化) することが出来る。

　このもとで，企業の利潤 π は以下の様に与えられる。

$$\pi = F(K, L) - rK - wL(= K^{\alpha}L^{1-\alpha} - rK - wL) \tag{20}$$

企業の利潤最大化の為の一階の条件は

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = F_K(K,L) - r (= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - r) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = F_L(K,L) - w (= (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} - w) = 0 \tag{22}$$

となる。これより $k = K/L$ 及び $Y/L = F(K/L, 1) = f(k)$ を用いると

$$r = f'(k) (= \alpha k^{\alpha-1}) \tag{23}$$

$$w = f(k) - f'(k)k (= (1-\alpha) k^{\alpha}) \tag{24}$$

を得る[2]。詰まり最適な k が相対価格 $p = r/w$ の函数 ($k = k(p)$) として決まると云う関係が得られる。詰まり企業の最適化行動からは最適な K，L は決まらず $k = K/L$ が決まるのみである。各企業 i は保有する資本ストック K_i に対して労働者 L_i を $K_i/L_i = k(p)$ が成立するように雇用しようとする。

3.2 家計の最適化行動

家計は異時点間の効用最大化行動を取る。効用に関しては Ramsey を同じ構造を考えているので引き続き (2) の形をとる。分権経済下では制約式は経済の資源制約ではなく家計の予算制約となる。今，家計は代表的家計を想定し，労働と人口が同一視され，この経済の資産は資本のみであるから $k = K/L$(一人当たり資本ストック) が家計辺りの保有資本ストックとなる。代表的家計なので家計は単位労働 1 を供給して賃金 w を得，保有資産 k に対して利子 rk を受け取る。この $rk + w$ が収入である。これに対して支出は一人当たり消費 c である。従って資本ストック量の変化は

$$\dot{k}(t) = r(t)k(t) + w(t) - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{26}$$

の式で与えられる。ここで $-(n+\delta)k$ は家計の人口増加で一人当たりの資本ストック量の減少分と資本の老朽化で減耗していく効果を反映したものである。

以上で準備は終了。家計の効用最大化問題 ($\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$) は以下の様な問題に設定される。

$$(\mathcal{P}^{\mathcal{D}}) \quad \max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{27}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = r(t)k(t) + w(t) - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{28}$$

中央計画当局が解いたのと同じ手法を使って最適化条件は導出される。

---

[2] $\frac{\partial \pi}{\partial K} = F_K(K,L) - r (= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - r) = 0$ から $r = f'(k) (= \alpha k^{\alpha-1})$ への変形はコブダグラス型の特定化の前には自明であるが，勿論，一般系のもとでも成立する。例えば

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = L \frac{dF(K/L,1)}{d(K/L)} \cdot \frac{d(K/L)}{dK} = \frac{df(k)}{dk} = f'(k) \tag{25}$$

である。

定理　問題 ($\mathcal{P}$) の最適解は以下で設定される (当該期価値) ハミルトニアン (ハミルトン函数)

$$\mathcal{H}(t) = u(c(t)) + \lambda(t)\{r(t)k(t) + w(t) - c(t) - (n+\delta)\} \tag{29}$$

の最大化条件である一階の条件より，オイラー方程式 (Euler equation または ケインズ=ラムゼイ公式とも)

$$\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho - n - \delta \tag{30}$$

と横断面条件 (横断性条件 transversality condition) によって条件付けられる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0 \tag{31}$$

但し此処で λ は効用のシャドウプライスであり当該期価値ラグランジュ乗数である。

社会計画者が考慮したのが資本の限界生産性 $f'(k)$ だったのに対して家計は利子率で消費の成長率を調整することになる。

3.3　市場均衡

ここで完全予見，合理的期待を仮定する。家計は実現する経済変数のパスを正確に予見し行動に反映させる。間違った予測をし続けるとの仮定はどの予測をどのような基準で用いるにしても ad hoc(恣意的な) ものになってしまう。

現実的には確率分布を想定して発生確率を想定していることになるので常に何が起きているかを正確に当てて る訳では無い。今，扱っている様な単純なモデルだと確率的要素が入っていないのでどんぴしゃで当たるというやや非現実的に見える仮定になってしまうだけである。

この仮定の下では家計の用いた最適化条件は家計の予想だったのであるが，実際の値であるとすることが出来る。詰まり企業の行動 $r = f'(k)$ を正確に予見する事になる。また企業の行動から得られる $w = f(k) - f'(k)k$ をも家計は正確に予期して行動することになる。従ってこれら家計の行動と企業の行動から得られる条件を合体させると

$$\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho - n - \delta = f'(k(t)) - \rho - n - \delta \tag{32}$$

$$\dot{k}(t) = r(t)k(t) + w(t) - c(t) - (n+\delta)k(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{33}$$

を得る。

これらは完全に集権経済での経済の動学方程式に一致している。詰まり，Ramsey モデルでの集権経済の動きは分権経済でも同じ帰結をもたらすのである！

そして賃金や利子率の決定メカニズムを完全に入れ込んだ扱いやすいモデルとして得ることが出来た。

この Ramsey モデルで得られた経済は歪みのない完全競争的・完備市場の元で市場がパレート最適を実現していくと云うものであった。特に定常状態に於ける利子率の決定 $f'(k) = \rho + n + \delta$ は修正黄金律 (modified golden rule) と呼ばれ，定常状態での一人当たり消費 c を最大化する黄金律 $f'(k) = n + \delta$ よりも将来の割引率である ρ の分だけ利子率が高く，従って資本蓄積がより低い水準となっている。

これによって Solow では外生的に (ad hoc) に貯蓄率を決めていたが Ramsey によって資本蓄積水準が内生的に決められることになった。

また集権＝分権の一致はマクロの世界でも市場経済が巧く行くことを示唆している。

それではマクロの世界に独自の市場の失敗はないのであろうか？

その答えの一つがある，であり，それを示すのが世代重複モデル (Overlapping Generations model/OG モデル) である。ここでは価格の調整は完全であるにも関わらずパレート最適が到達出来ない可能性が示される。導入される要素は，というか撤回される Ramsey model の要素は dynasty model(＝家計の永続) の仮定である。

OG モデルでは想定を極端にして人は若年期と老年期の２期間しか生きられないと仮定する。一番簡単な仮定としては若年期にのみ働き，老年期は若年期の蓄えを取り崩すことになる。これによって現在と将来の取引が阻碍されて貯蓄率が最早最適な修正黄金律に決まる保証がなくなるのである。

References

[1] Cass，D. ”Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” *Review of Economic Studies*，22 233 − 240

[2] Ramsey, F. P. ”A Mathematical Theory of Saving,” *Economic Journal,* 38, 543 − 559.

[3] Uzawa, H.（1965) ”Optimum Technical Change in an Aggregate Model of Economic Growth,” *International Economic Review* 6, 18 − 31.

[4] 鈴木 康夫 (2003) ”ラムゼイの功利主義的至福と最適消費・資本蓄積理論” **滋賀大学経済学部研究年報** 10 巻