1 Ramsey model

長期に亘る (異時点間の intertemporal) 意志決定を取り扱う。

毎期の貯蓄と消費の選択を最適化する行動を入れる事が出来る。

先ずは集権経済 (計画経済)command economy で社会計画者 social planner の問題を解いた後に分権経済 (市場経済)decentralized economy(market economy) を分析する。

全知全能 almighty で善意の benevolent 政府 government を想定する。→実際に国民のニーズ (効用 utility) を正確に収集し経済厚生 welfare を最大化する様に行動し，しかもそれを実際に実行可能な政府。

効用の構造
代表的個人 (家計)representative agent(household)

→多種多様な個人・家計の平均を取り，その代表値を持つ同質の個人からのみなると仮定する

これが正当化されるのは，簡略化の為でもあるし，消費は最終財１種類の消費量に還元され，また消費者のパラメーターは二つ (リスクに対する態度と現在と将来のウエイト付け) に絞られるのでその都合２種類に関して国民性みたいなもので統一が取れていると考えられなくも無い。勿論，分析対象に於いて異質性が重要になってくる場合は勿論異質性を入れてやるべきである (例えば世代の違い→世代重複モデル)。

具体的に需要構造を以下の様に式で示す。

■離散系

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\beta)^t} u(c_t) \tag{1}$$

■連続系

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{2}$$

効用の構造の特徴は，主に以下の三つである。

時間に関して加法分離 (additive separable)，t 期の消費は t の効用にのみ影響する，と仮定する。これによって各期の消費から得られる効用は瞬時的効用函数 (instantaneous utility function)$u(c)$ と呼ばれる各期の瞬間の消費を瞬間の効用に結ぶ付ける函数で現すことが出来る。

現在の効用の方が将来の効用よりもより大事である。これを割引 discount と云う。将来 (より大きい t) に対して効用をより小さくする部分を割り引き因子と云い下の例だと $\frac{1}{(1+\beta)^t}$ や $e^{-\rho t}$ がそれに当たる。特に ρ を主観的割引率 subjective disucount rate と云う。

将来の効用のウエイトは無限に小さくなっていくが，無限期先迄配慮はする (無限計画時間視野 infinite planning time horizon) 王朝モデル (dynasty model) と呼ばれる設定。

この効用を制約の下で最大化するのが目的となる。この状況での制約は異時点間 (intertemporal) の予算制約である。

異時点間の予算制約としては異時点間を持ち越せるもの，貨幣や資産を導入する必要がある (これがない場合，毎期毎期の最大化に帰着し問題は簡単になるが現在と将来のトレードオフは分析出来ない。)。

長期の分析であるので貨幣の中立性・超中立性を仮定する。この許では新古典派的な貨幣ヴェール観が成立し，貨幣は交換手段としてのみ存在し恰も貨幣がないかの様な世界のもとで経済の動きを記述出来る。

今，資本を K とすると，消費と貯蓄の選択が資本の蓄積に影響を与える資本蓄積の関係式より再び以下を得る。

$$Y = C + S \underbrace{=}_{I=S} C + I \underbrace{=}_{\dot{K}=I-\delta K} C + \dot{K} + \delta K \tag{3}$$

これを変形すると

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{4}$$

となる。$Y = C + S$ より $S = Y - C$ であるから $S = sY$ の Solow モデルで出ていた資本蓄積式と基本的には同じものである。Solow ではこの s が固定だったが今回は C を意識的に変えることで s を操作出来るという点である。

ここで C は社会全体の消費量，効用函数の中の c は一人当たり消費量であるから両者の関係は，再び人口と労働量を同一視して $C = cL$ である。

またここで生産と人口成長に関しては Solow モデルと同じ構造を踏襲し，$Y = F(K, L)(= K^\alpha L^{1-\alpha})$，$\dot{L} = nL$ とする (almighty な政府としても技術問題の生産函数や個々人の選好の問題の人口には介入出来ないとする。)

この許で (4) は以下の様に変形される。

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k(t) \tag{5}$$

此処で再び $k = K/L$ であり，最終財生産函数の一次同次性より $y = Y/L = f(k)$ が成立する。

以上で準備は終了。中央計画当局の最適化問題 $(\mathcal{P})$ は以下の様な一人当たり資本ストック量 k と一人当たり消費量 c を変数とする問題に設定される。(これを社会計画者の問題と呼ぶ。)

$$(\mathcal{P}) \quad \max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{7}$$

となるこの様な時間を通じた最適化問題を解く解法は既に知られていてそれを適応すればよい。ポントリャーギンの最大値原理やベルマンのダイナミックプログラミング (動的計画法) を使って解くことが出来る。ここでは最大値原理が良く使われる。

定理　問題 $(\mathcal{P})$ の最適解は以下で設定される (当該期価値) ハミルトニアン (ハミルトン函数)

$$\mathcal{H}(t) = u(c(t)) + \lambda(t)\{f(k(t) - c(t) - (n+\delta)\} \tag{8}$$

の最大化条件である一階の条件より，オイラー方程式 (Euler equation またはケインズ=ラムゼイ公式とも)

$$\varepsilon(t)\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \rho - n - \delta \tag{9}$$

と横断面条件 (横断性条件 transversality condition) によって条件付けられる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0 \tag{10}$$

但し此処で λ は効用のシャドウプライスであり当該期価値ラグランジュ乗数であり，$\varepsilon = -u''(c)c/u'(c)$ は限界効用の消費弾力性である。

横断面条件は王朝モデルの本モデルに於いて，無限期先に有限価値の資本ストックを残しておくことは無駄 (効用は効用函数の形状より消費からのみ得られるのに，消費しきれない程の資本ストックを余らせておく事になる) であるのでそれを排除している。

オイラー方程式は経済が動いていく上で満たすべき条件であり，左辺は消費を通じた効用の異時点間の限界代替率に対応し，右辺は生産をめぐる限界変形率に対応している。

また簡略化の為に (定常状態で c が成長する技術進歩が含まれている時には定常成長を得る為に)$\varepsilon(t) = \theta$ と時間を通じて一定であると仮定する。この仮定は瞬時的効用函数 $u(c)$ が以下の様な形をしていることを示唆する。

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0$$

この形の効用函数の θ は異時点間の代替の弾力性の逆数であり，また相対的リスク回避度一定 (CRRA) 型でもある。分子に -1 が着いているのは $\theta \to 1$ の時に ロピタルの定理を適応して $u(c) = \log c$ をも含める用にするためである。

これで k と c からなる経済の動きを示す動学方程式として (5) と (9) が得られた。これらはいずれも k と c のみを変数に含むので経済全体の動きがこれで描写可能である。

以上を纏めると，この経済の動学は 2 本の動学方程式から描写可能

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t)(:= \phi(k,c)) \tag{11}$$

$$\theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \rho - n - \delta \tag{12}$$

2 本目は $\dot{c}$ に就いて解けば

$$\dot{c}(t) = (1/\theta)\big\{f'(k(t)) - \rho - n - \delta\big\}c(t)(:= \psi(k,c))$$

概念的に書けば

$$\dot{k} = \phi(k,c) \tag{13}$$

$$\dot{c} = \psi(k,c) \tag{14}$$

となり，この二つの変数が二つの動学方程式を通じて時間変化が内生的に決定されるので動きを規定 (導出) することができる。

ここで k と c の動きは勿論

$$\dot{k}\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\} 0 \Longleftrightarrow k : \left\{\begin{array}{l} \text{増える}\ (\uparrow) \\ \text{一定}\ (\rightarrow) \\ \text{減る}\ (\downarrow) \end{array}\right. .$$

勿論 c に就いても同様。 全部で $\{k, c, \dot{k}, \dot{c}\}$ の 4 要素あるので 4 次元必要だが困難。$\{k, c\}$ 平面を用い，$\dot{k}$ と $\dot{c}$ はその $\{k, c\}$ 平面上の矢印で描く事にする。

先ずは

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k\left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\} 0 \Longleftrightarrow c\left\{\begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array}\right\} f(k) - (n+\delta)k.$$

となる。詰まり

$$c\left\{\begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array}\right\} f(k) - (n+\delta)k. \Longleftrightarrow k : \left\{\begin{array}{l} \text{増える}\ (\uparrow) \\ \text{一定}\ (\rightarrow) \\ \text{減る}\ (\downarrow) \end{array}\right. .$$

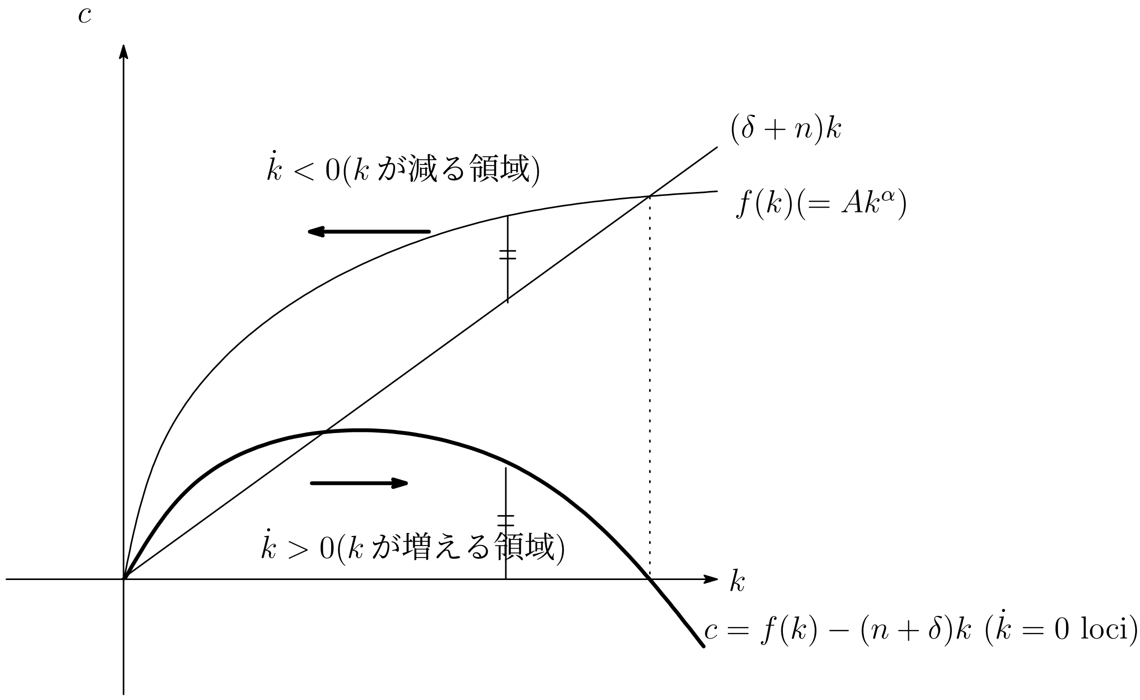

Figure 1: kの動学

である。大量の消費が資本蓄積を妨げ逆は逆を表現していることに注意。

この関係式をグラフに落としてみる。

cに関しても同じ事が出来る。

$$f'(k)=\alpha A k^{\alpha-1}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\rho+n+\delta. \Longleftrightarrow c:\left\{\begin{array}{l}\text{増える}\ (\uparrow)\\ \text{一定}\ (\rightarrow)\\ \text{減る}\ (\downarrow)\end{array}\right. .$$

この条件はcの動学を規定するがcが含まれていないのでkの値がcの成長率を決める事になる。

$$\alpha A k^{\alpha-1}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\rho+n+\delta. \Longleftrightarrow k\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}\left(\frac{\alpha A}{\rho-n-\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\ (:=k^{\$}).$$

$f(k)=Ak^{\alpha}$の特定化の元では特設解けるてしまうが，一般的な形でも$k^{\$}:=\arg\{k|f'(k)=\rho+n+\delta\}$と定義すれば基本は同じである。

そして上2条件を纏めると以下の条件を得る。

$$k\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}k^{\$}\Longleftrightarrow c:\left\{\begin{array}{l}\text{増える}\ (\uparrow)\\ \text{一定}\ (\rightarrow)\\ \text{減る}\ (\downarrow)\end{array}\right. .$$

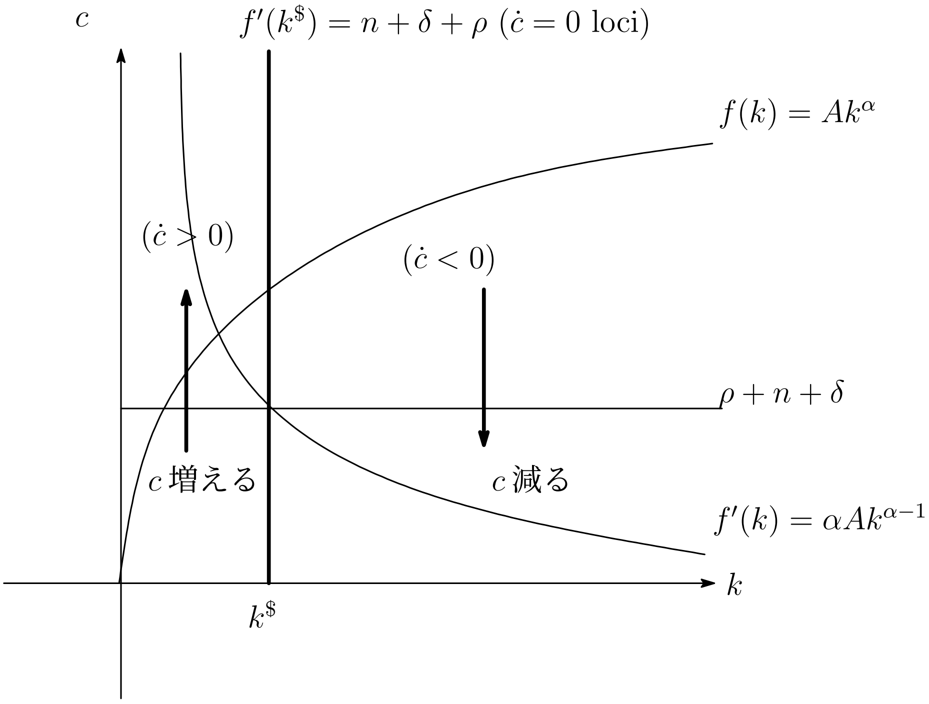

Figure 2: c の動学

この二つの動きは実際は同時進行なので組み合わせて考える必要がある。

併せると位相図と呼ばれる以下の様な c と k がどちらに動くかを示す図が得られる。

この図の矢印の方向に従って経済は動いていく。矢印を繋げると図の様になる。現在に於いて k は所与。c は自由に選べる。

k の値に拘わらず初期の c_0 を選ぶと経済がやじるに導かれて A か B か S へ収束する converge 経路に乗る。

[B] は有限期間の内に k を消費し尽くして経済の持続可能性が破綻してしまう経路。[A] は長期的に消費を犠牲にして k を溜め込んで行く経路。破綻はしないが効用をもたらさない k のみが増えて c が漸減していく経路。横断面条件によって弾かれる。

最適解としては [S] に収束する経路を選び (遷移過程)，[S] に到着後はそこに留まる (定常状態) のがベストとなる。

これは成長率の振る舞いは Solow と似ていて経済発展初期の高成長とその後の安定成長を記述する他，貯蓄に関するマイクロファンデーションも含んでいる。

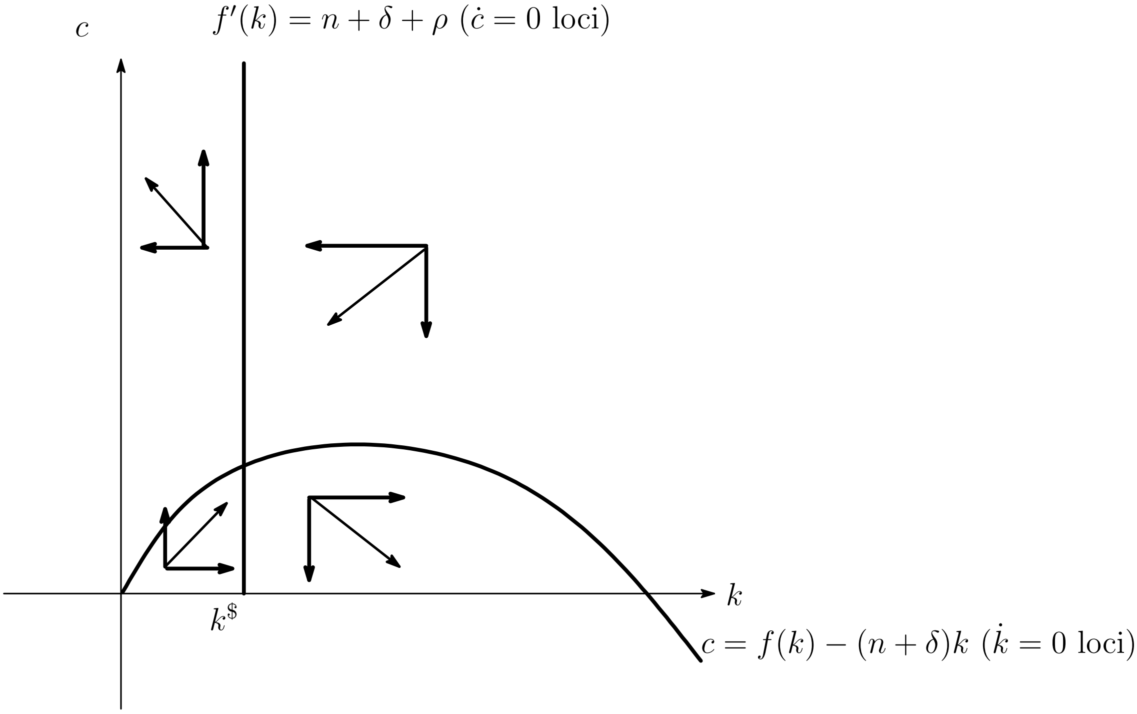

Figure 3: 位相図

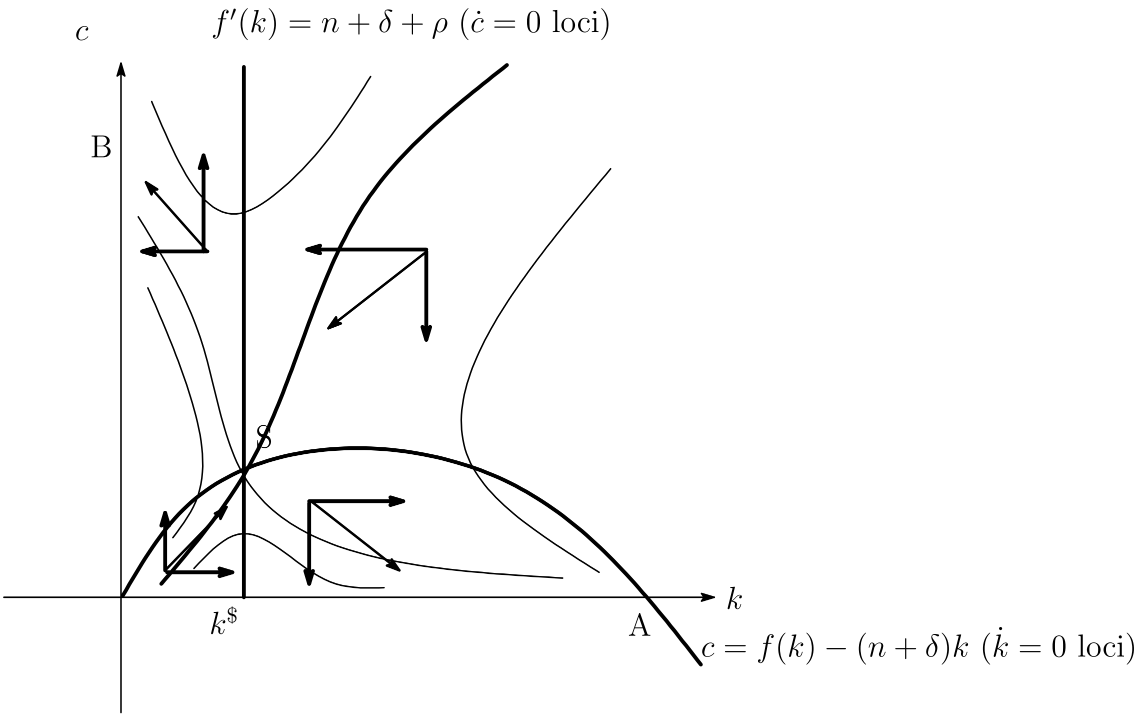

Figure 4: 位相図