1　世代重複モデル

家計　時間は離散。$t = 1, 2, 3, ...$

各世代は2期間しか生きない。各世代の利己的な行動を調整する政府は出てこない。分権経済のみを考える。

t期に成人する世代を第t世代としこの世代はt期に若年期(青年期/young)を迎え，労働市場に参入し労働して得た所得で消費と貯蓄を行い，$t+1$期には老年期(old)を迎え仕事はリタイアし若年期の貯蓄を切り崩して消費をして人生を終える。tは大体30年位のスパン。

t期の貯蓄が$t+1$期の資本蓄積となる。若者が労働を老人が資本を提供してそれぞれ労働収入と資本収入を分け合う。

初期$t = 1$期には第1世代の青年と第0世代の老人がいるが，この第0世代は開始時に既に働き終わっていて資本を既に提供してそれを受け取って消費するだけである。

各世代の効用は同質で生まれた時期だけが違うとし，以下の様な共通の効用を持つとする。

$$U_t = u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\rho}u(c_{2t+1}) \tag{1}$$

ここでc_1は若年期のc_2は老年期の消費であり，第t世代はt期に若年期を迎えるのでc_{1t}，$t+1$期に老年期を迎えるのでc_{2t+1}となる。この辺はモデルによって表記に違いがある場合があるので注意。

予算制約は若年期と老年期に別れている。若年期は非弾力的に1単位の労働を供給しその労働で得た所得wを消費c_1と貯蓄sに配分する。老年期には若年期に貯めた貯蓄に利子がついており，それら全てを消費c_{2t+1}に回す。これらを式で表現すると

$$w_t = c_{1t} + s_t, \tag{2}$$
$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t \tag{3}$$

となる。従って(1)を(2)と(3)の制約の下で最大化すればよい。配分の意志決定はs_tとc_{1t}の量だが，労働市場は完全だと仮定すると家計にとってw_tは所与なのでs_tを決めればc_{1t}が決まるし，逆は逆でどちからに注目すれば良い。

ここではs_tを変数として取り上げることにする。(2)と(3)を(1)に代入してc_1とc_2を消去すると以下を得る：

$$U_t = u(w_t - s_t) + \frac{1}{1+\rho}u((1 + r_{t+1})s_t) \tag{4}$$

r_{t+1} も w_t 同様，家計に取っては市場で決まる所与の変数であり与件 (given)。従って U_t は s_t に関する制約無し最大化問題となる。従って一階の条件として

$$\frac{dU_t(s_t)}{ds_t} = u'(c_{1t})\frac{dc_{1t}(s_t)}{ds_t} + \frac{1}{1+\rho}u'(c_{2t+1})\frac{dc_{2t+1}}{ds_t} = 0 \tag{5}$$

$$0 = u'(w_t - s_t)(-1) + \frac{1}{1+\rho}u'((1+r_{t+1})s_t)(1+r_{t+1}) \tag{6}$$

世代重複モデルは様々な動学パターンを出せるのが魅力であるが，ここでは解説的な目的を優先して一番簡単なケースである対数線型 ($u(c) = \log c$) を採用する。複雑なパターンは出ないが解析的に解けて解が明示的に得られるメリットがある。$u'(c) = 1/c$ であるので上の条件は

$$\frac{1}{w_t - s_t} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})s_t} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{s_t} \tag{7}$$

詰まり対数線型のもとでは利子率 (来期の消費量の大きさ) は貯蓄行動に影響を及ぼさない。そしてこれを解くと

$$s_t = \frac{1}{2+\rho}w_t \tag{8}$$

となる。これより

$$c_{1t} = \frac{1+\rho}{2+\rho}w_t, \quad c_{2t+1} = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}w_t \tag{9}$$

を得る。[1] 以上が家計の行動である。

企業　次に市場経済を考えるがこれも完全競争下での新古典派マクロ均衡である。生産函数を $Y_t = F(K_t, L_t)$ として $Y_t/L_t = y_t$，$K_t/L_t = k_t$ すると一人辺りの生産函数を $y_t = f(k_t)$ となり Ramsey の時と同様に

$$r_t = f(k_t), \quad w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t \tag{10}$$

が成立する。

[1] より一般的に $U = a\log c_1 + b\log c_2$(もしくは $U = c_1^a c_2^b$) の時，最適な消費は

$$c_1 = \frac{a}{a+b}w, \quad c_2 = \frac{b}{a+b}(1+r)w$$

となる。$1+r$ は貯蓄をすることで買える来期の所得の倍率であり，来期の消費の有利さを示している。消費財が $1/(1+r)$ だけ安くなったとも云える。その影響を除けば消費の効用のウェイト $a:b$ で消費をすることが最適であると示している。

市場均衡　市場均衡を考える。世代重複モデルの１期間は30年(比較的長い)である。資本の減耗率を１とする。貯蓄は来期に資本となるが，その期限りで減耗するとする[2]。

$$K_{t+1} = S_t. \tag{11}$$

今，人口成長を $L_{t+1} = (1+n)L_t$ とする。１世代後の世代は前の世代の $1+n$ 倍の人口となる。t 期の貯蓄主体の人口は L_t であるので貯蓄総額は $S_t = s_t L_t$ となる。これと $L_{t+1} = (1+n)L_t$ を (11) に代入すると

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_t L_t}{(1+n)L_t}, \quad \text{namely,} \quad k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s_t \tag{12}$$

ここで $Y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ 即ち $y = f(k) = k^\alpha$ とすると (10) は

$$r = \alpha k^{\alpha-1}, \quad w = (1-\alpha)k^\alpha \tag{13}$$

となるので (13) を使って (8) を (12) に代入すると

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+\rho)}(1-\alpha)k_t^\alpha \tag{14}$$

k_t に関する１階差分方程式が得られた。これは簡単に解くことが出来て図の様になる。

経済は k_0 を起点に $k_0 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow ,,,$ と資本蓄積をした上で最終的に k^* へ到達してそこに留まることになる。遷移過程を経て定常状態に到達するという Solow や Ramsey の動学パターンがここでも示されている。外生的な技術進歩を入れる事で基本的な動学パターンを現出させることがここでも可能である。

更に，この定常状態の資本蓄積は計算出来て (14) に $k_t = k_{t+1} = k^*$ を入れれば良い。

$$k^* = \frac{1}{(1+n)(1+\rho)}(1-\alpha)k^{*\alpha} \quad \text{より} \quad k^* = \left[\frac{1}{(1+n)(1+\rho)}(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{15}$$

となる。この結果は移行過程の後に定常状態に安定的に移行するというこれまでの結果と整合的なものである。

しかし，一般的には

$$k_{t+1} = \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}))}{1+n} \tag{16}$$

の解が，修正黄金律を満たす補償は何処にもなく，定常状態がパレート改善が可能な状況もありうる。

[2]資本が完全減耗しない場合，$K_{t+1} = S_t + (1-\delta)K_t$ となる。

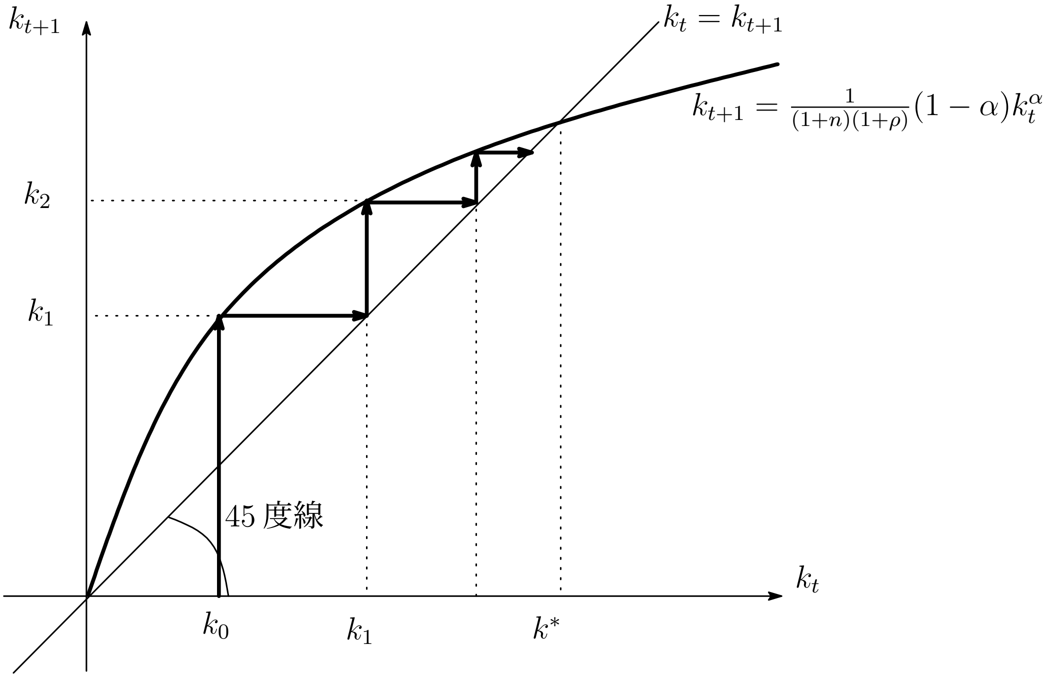
k_{t+1}
$k_t = k_{t+1}$
$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+\rho)}(1-\alpha)k_t^{\alpha}$
k_2
k_1
45 度線
k_t
k_0
k_1
k^*

Figure 1: 位相図