A Simple Version of the Jones model

Shiro KUWAHARA

October 24, 2020

1　緒言

内生的成長理論 (Endogenous Groth Theory) 勃興の出発点となった劃期的な論文である Romer(1990) は中間財の種類が拡張していくモデルである。

この Romer model には人口規模の扱いに問題があった。理論的にも実証的にも問題を抱えているのである。

結論の一つに

$$g^* = \frac{\delta L - \Lambda\rho}{\Lambda\theta + 1}$$

where $\Lambda := \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}}$.

があるが，これは成長率 g^* が人口規模 L の函数になっていて，人口が高い方が成長率が高いという結論が得られているが，これは近年の途上国の成長の開始迄は人口の少ない先進国と人口の多い途上国の成長という戦後経済の基本的な枠組みがあって実証的に矛盾していた。

もう一つ，理論的に人口成長を取り扱えないと云う問題が存在する。人口成長，即ち L の継続的な上昇，があった場合，成長率が成長 (持続的に上昇) してしまうと云う問題を孕んでいるのである。

これらの問題点は scale effects(規模効果) と呼ばれている。

これに対する理論的に一番簡単な解決法は R&D 函数をいじることである。

$$\dot{A} = \frac{\delta A L_A}{\Omega}$$

と云う様に R&D の困難化要素であるなんらかの要素 Ω を入れてやってこの Ω が結果的に人口成長と等しく上昇していけば成長率は人口成長下でも一定となる。

併し，Jones はこの方法を理論的に microfoundation が無いと否定し，且つ実証的にもデータに合わないと否定した (Jones 1995)。これを Jones critique(ジョーンズ批判) と呼んだ。

Jones は R&D 刺戟策に対する成長率の応答の悪さを示し，長期的に成長政策の効果は薄い事実を元に，以下の様な R&D 函数を提示した。

$$\dot{A} = \delta A^{\phi} L_A^{\eta}, \quad \phi \in (0,1], \quad \eta \in (0,1)$$

ナイフエッジ的な Romer 型 R&D 函数に代わって収穫逓減の Jones 型 R&D 函数は Jones technology と呼ばれて，人口成長を組み込む事には成功したが，結論はつまらないものになってしまっている。詰まり長期の成長率が人口成長率に依存してしまうと云う副作用を産む事になった。折角，Romer が内生化した成長率を外生時代の様な人口成長率への依存に戻してしまったのである。その意味で Jones models は semi-edogenous model(准内生成長モデル) とも呼ばれた。

なお本稿は岩井 (1994) や D. Romer (2011) を読了したか併読中程度の読者を想定しており学部上級から大学院１回程度のマクロ経済学の基礎知識 (Solow model から Ramsey-Cass-Koopmans model) を前提としている。

2 最終財部門 (Final good sector)

労働と A 種類のタイプの中間財の群から最終財は作られる。完全競争。

生産函数：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x(i)^{\alpha} di, \quad \alpha \in (0,1) \tag{1}$$

where Y, L_Y, $x(i)$, A denote output, labor input in final goods production, ith intermediate goods input and number of intermediate goold.

最終財を muneraire にする。

最終財部門の利潤 π^Y ：

$$\Pi^Y = Y - wL_Y - \int_0^A p(i)X(i)di, \tag{2}$$

此処で w, $p(i)$ は実質賃金と第 i 部門での需要である。

利潤最適化の為の一階の条件：

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = 0. \tag{3}$$

これらを計算してみると

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial L_Y} = \frac{\partial Y}{\partial L_Y} - w = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Pi^Y}{\partial X(i)} = \frac{\partial Y}{\partial X(i)} - p(i) = 0. \quad i \in (0, A) \tag{5}$$

(4) と (5) に (1) を代入して計算する：

$$(1-\alpha) L_Y^{-\alpha} \int_0^A X(i)^\alpha di - w = 0, \tag{6}$$

$$\alpha L_Y^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - p(i) = 0. \tag{7}$$

3　中間財部門 (Intermediate good sector)

生産構造 (最終財 η 単位で中間財 1 単位生産出来ると仮定する)：

$$X(i) = \frac{1}{\eta} Y(i), \quad \eta > 1 \tag{8}$$

此処で $Y(i)$ は第 i 部門で使用される最終財。

第 i 部門の中間財部門の利潤 $\pi(i)^M$　：

$$\Pi(i)^M = p(i)X(i) - Y(i) = p(i)X(i) - \eta X(i). \tag{9}$$

中間財部門は発明者 (後から説明) から購入した知的財産権 (特許) を背景に独占的に供給出来る。最終財は購入しないよりも購入した方がマシになるので購入するが，価格とともに購入量は減少。その関係は最終財の最適化条件 (7)($p(i) = \alpha L_Y^{-\alpha} X(i)^{\alpha-1}$) で示される。

　最適化問題は

$$Max\, \Pi(i)^M, \quad s.t.Eq.(7)$$

より以下の形となる：

$$\max_{X(i)} \quad \Pi\big(X(i)\big)^M = \alpha L_Y^{1-\alpha} X(i)^\alpha - \eta x(i). \tag{10}$$

よって一階の条件は

$$\frac{\partial \Pi(X(i))^M}{\partial X(i)} = \alpha^2 L_Y^{1-\alpha} X(i)^{\alpha-1} - \eta = 0. \tag{11}$$

これより最適な行動下での中間財生産：

$$X(i)=\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L_Y. \tag{12}$$

(12) 式を (7) 式に代入して中間財の独占価格：

$$p(i)=\frac{\eta}{\alpha}(>1) \tag{13}$$

を得る。$p(i)>\eta$(単位コスト＝限界コスト) なので独占価格付けとなっている。(完全競争ではない＝パレート最適ではない＝政策介入の余地がある) 分権経済の非パレート最適性は後に計画経済下での経路を解いてその異同を調べることとする。

また各企業は対称。$X(i)=\tilde{X}$，$p(i)=\tilde{p}$，$\Pi(i)=\tilde{\Pi}$ と書ける。

4　研究開発部門 (R&D sector)

知識総生産函数 (R&D 函数)：

$$\dot{A}=\delta A^{\phi}L_A^{\eta},\quad \phi\in(0,1),\quad \eta\in(0,1],\quad \phi+\eta\leq 1 \tag{14}$$

where $\dot{Z}\equiv\frac{dZ(t)}{dt}$, and L_A denotes labor input on R&D sector.

(14) は Romer 型に代わる Jones type の R&D 函数であり，特徴としては A と L_A に関して非線形。

$\dot{A}$ は新しく発明される知識であり１つの特許でカヴァーされるとする。A は社会全体の知識量なので $\dot{A}$ も社会全体の新知識の量。

研究開発部門は自由参入。j 社の確保する特許は全体の R&D 投入量に対する j 社の投入量の比率に比例する。全体の R&D 投入 (労働) 量 L_A に対して j 社の労働投入量を $L_A(j)$ とする。この時利潤は以下の如し。

R&D 部門の利潤 $\pi(j)^R$　：

$$\pi(j)^R=\dot{A}\,\tilde{V}\,\frac{L_A(j)}{L_A}-wL_A(j), \tag{15}$$

where $\tilde{V}$ denotes １つの特許によって得られる独占利潤流列の現在価値，詰まり発明成功による価値 (収入の総和)：

$$\tilde{V}=\int_0^{\infty}\tilde{\Pi}e^{-\int_0^t r(s)ds}dt \tag{16}$$

利潤最大化の一階の条件：

$$\frac{\partial \pi(j)^R}{\partial L_A(j)} = \dot{A}\tilde{V}\frac{1}{L_A} - w = 0 \tag{17}$$

$L_A(j)$ に関して線形なので一階の条件だけでは生産量は決まらない。

更に R&D 活動には自由参入なので利潤が正である限り無限の企業が参入してきてしまう。従って R&D 活動が行われる ($L_A > 0$) 時には自由参入の元で利潤ゼロ条件 ($\pi(j)^R = 0$) が満たされなくてはならない。

また一階の条件が負 ((17)<0) の時は，全 R&D 活動が停止する ($L_A = 0$) ことになる (固定費用がないので損益分岐点＝操業停止点)。

R&D の発生条件：

$$\dot{A}\tilde{V}\left\{\begin{array}{c} = \\ < \end{array}\right\} wL_A \Longleftrightarrow L_A\left\{\begin{array}{c} > \\ = \end{array}\right\} 0. \tag{18}$$

ここで (**??**) で与えられる $\tilde{V}$ を時間微分すると以下の資産方程式 (asset equaion)or 無裁定条件式 (no-arbitrage equation) を導出出来る：

$$r\tilde{V} = \dot{\tilde{V}} + \tilde{\Pi} \tag{19}$$

また (18) より利潤ゼロが成立する R&D が行われる均衡では (14) を代入して

$$\delta A^{\phi} L_A^{\eta} \tilde{V} = wL_A. \tag{20}$$

が成立し，$\tilde{V}$ に必要な条件を規定している。

5　家計 (household)

通常の家計を想定。無限期存続して一定の主観的割引率と消費からのみ効用を得る瞬時的効用函数を持つとする：

$$U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0 \tag{21}$$

通常の最適化問題を解いて通常の Euler 方程式を得る：

$$\theta\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - n. \tag{22}$$

人口成長率が入って居る分 n も入って居る。

6　マクロ均衡

(12) 式を (1) 式に代入：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \left(\left[\frac{\alpha^2}{\eta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y \right)^{\alpha} di = \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A L_Y \tag{23}$$

ここで $\int_0^A (const) di = (const) \int_0^A di = (const)[\,i\,]_0^A = (const)A$ であることに注意。

同様に (12) を (6) に代入：

$$w = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A \left(= (1-\alpha) \frac{Y}{L_A} \right) \tag{24}$$

また (12)，(13) を (9) に代入：

$$\tilde{\Pi}^M = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \eta \tilde{X} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \eta \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y = (1-\alpha) \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{Y}{A}. \tag{25}$$

この簡略化されたモデルでは資本は含まれない。最終財は中間財か消費財に利用される。

$$Y = C + \eta X \tag{26}$$

ここで $C = Lc$ であり，各部門の対称性より $X \equiv \int_0^A X(i) di = A\tilde{X}$。

(12) と (23) より

$$\begin{aligned} C = Y - \eta X &= \left[\left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \eta \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] A L_Y \\ &= \left(1 - \alpha^2 \right) \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A L_Y = \left(1 - \alpha^2 \right) Y. \end{aligned} \tag{27}$$

(20) に (24) を代入して以下を得る：

$$\tilde{V} = \frac{w L_A^{1-\eta}}{\delta A^{\phi}} = \frac{1-\alpha}{\delta} \left(\frac{\alpha^2}{\eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{1-\phi} L_A^{1-\eta}. \tag{28}$$

(19) に (25) と (28) を代入して

$$r = \frac{\dot{\tilde{V}}}{\tilde{V}} + \frac{\delta \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y}{A^{1-\phi} L_A^{1-\eta}} \tag{29}$$

7　動学方程式の導出

定常状態と動学分析の分析も用いる変数を先ずは導入する。

労働賦存は外生一定の成長率 n で成長すると仮定するので $\dot{L} = nL$ が成立。労働者は生産と R&D に配分されるので生産に回される比率を u として $L_Y = uL$，$L_A = (1-u)L$ と書き直すと，動学的変化は一定の人口成長率で成長する L と労働者の資源配分するのは u の部分に分解可能となる。

また定常状態で一定となる様な変数を考える。$L_A = (1-u)L$ を用いて (14) 式を書き換えると

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta(1-u)^{\eta} A^{\phi-1} L^{\eta} = \delta(1-u)^{\eta}\chi. \tag{30}$$

此処で $\chi \equiv A^{\phi-1}L$ であるが，$u \in (0,1)$ が長期的な定常状態にある必要があるので残る χ も

ここまで出て来た動学方程式は $\dot{L} = nL$ に加えて (14)，(19) そして (22) の４本である。対応する動学変数は $A, \tilde{V}, c$，L。５節の表記を利用してこれらを u と χ の動学方程式に書き換えていく。

(22) に $C = cL$，$L_Y = uL$ 及び (14)，(27) を代入。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{u}}{u} = \delta(1-u)^{\eta}\chi + \frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{\theta}(r - \rho - n), \tag{31}$$

where $\chi := A^{\phi-1}L^{\eta}$. A，$\dot{A}$，c と $\dot{c}$ の情報が u と $\dot{u}$ と r と χ で書き換えられた。

(19) に $\tilde{V}$ と $\tilde{\Pi}$ の情報を入れていく。(28) より

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\tilde{V}}}{\tilde{V}} &= (1-\eta)\left(\frac{-u}{1-u}\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{L}}{L}\right) + (1-\phi)\frac{\dot{A}}{A} \\ &= (1-\eta)\left(\frac{-u}{1-u}\frac{\dot{u}}{u} + n\right) + (1-\phi)\delta(1-u)^{\eta}\chi. \end{aligned}\tag{32}$$

(28) を新しい変数 u と ξ を用いて書き換えて以下を得る：

$$\frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{V}} = \Gamma(\alpha)\delta\frac{u}{(1-u)^{1-\eta}}\chi \tag{33}$$

但し此処で $\Gamma(\alpha) \equiv \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ であり，この Γ は $\Gamma(\alpha) \in (0,1) \quad \text{for} \quad \alpha \in (0,1)$ 及び $\Gamma'(\cdot) > 0$ を満たす。

(32) と (33) を (29) に代入し，以下を得る：

$$r = (1-\eta)\left(\frac{-u}{1-u}\frac{\dot{u}}{u} + n\right) + (1-\phi)\delta(1-u)^{\eta}\chi + \frac{\Gamma(\alpha)\,\delta\, u}{(1-u)^{1-\eta}}\chi \tag{34}$$

(31) と (34) から r を消去すると u の動学方程式が得られる。

$$\left[\theta+\frac{(1-\eta)u}{1-u}\right]\frac{\dot{u}}{u}=-\eta n+\left[1-\phi-\theta+\frac{\Gamma(\alpha)u}{1-u}\right]\delta(1-u)^{\eta}\chi-\rho. \qquad (35)$$

$\tilde{V}$ と $\dot{\tilde{V}}$ の情報は u と χ の情報に置き換えられた。

Romer モデルと比較して消えずに残る要素 χ に関しても動学的な記述をする必要がある。

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi}=-(1-\phi)\frac{\dot{A}}{A}+\eta\frac{\dot{L}}{L}=-(1-\phi)\delta(1-u)^{\eta}\chi+\eta n \qquad (36)$$

こうして $\dot{\chi}$ も $\dot{u}$ も，u と χ で示されるので，経済の動学方程式は u と χ で描写出来る，即ちこの経済 (簡略化された Jones model) では動学情報は 2 次元に集約される！Ramsey model でやった時の様な手法 ($u-\chi$ 平面上での位相図による分析) が利用可能。

8 定常状態と動学分析と准内生的成長

定常状態 (36) と (35) より定常状態の (u,χ) たる (u^*,χ^*) が導出できる。(36) に於ける $\dot{\chi}=0$ から

$$\chi^*=\frac{\eta n}{(1-\phi)\delta(1-u^*)^{\eta}} \qquad (37)$$

(35) に於いて $\dot{u}=0$ と (37) より

$$u^*=\frac{\rho+\frac{\eta n}{1-\phi}\theta}{\rho+\frac{\eta n}{1-\phi}\left\{\theta+\Gamma(\alpha)\right\}}(\in(0,1)) \qquad (38)$$

定常状態の労働配分比率や労働・知識資本比率が出たところである。

Result J-1 注意したいのは u^* は $n\neq 0$ で必ず内分点となると云う事。詰まり，人口成長率が効く限りゼロ成長の罠 (no growth trap) は発生しない ($n=0$ で $u^*=1$ となる)。逆に云うと，人口成長率が経済成長率に必要となってきてしまっている。これが Jones model の准内生的な (semi-endogenous) 性質である。

Result J-2 (37) と (38) より (14) に $A^{\phi-1}L^{\eta}=\chi^*$ 及び $L_A=(1-u^*)L$ を代入して定常状態の成長率を得る：

$$g^*=\frac{\dot{A}}{A}=\delta(1-u^*)^{\eta}\chi^*=\frac{\eta n}{1-\phi}. \qquad (39)$$

成長率も n の値に直結する。

Romer model の劃期的な点は，此迄 g は外生に与えられて一定であった。この場合，g の値が，モデル内の δ，L，ρ，α と云ったパラメータによって内生的に導出されている。

対して Jones モデルは R&D に関する要素は ϕ, η, n と云ったパラメータによって内生的に導出されている。

Result J-3　政策的により重要なのは R&D の刺戟策では成長率を引き上げられなくなったということ。成長率の R&D 政策に対する感応度がなくなったということ。人口成長を上げて研究者の数を増やして行かないと成長しない。

動学分析　動学的性質はどうなっているのか？

(36) より

$$\dot{\chi}(t)\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0 \Longleftrightarrow \chi(t)\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}\frac{\eta n}{(1-\phi)\delta\big(1-u(t)\big)^{\eta}} \tag{40}$$

これより Fig.1 の様な χ の動きを得る。

(35) より

$$\dot{u}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0 \Longleftrightarrow \Phi(u)\delta(1-u)^{\eta}\chi\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\rho+\eta n \tag{41}$$

$\Phi(u;\theta)\equiv 1-\phi-\theta+\frac{\Gamma(\alpha)u}{1-u}$ の正負で動学的性質が変わる。

ここで簡略化の為に $\theta=1$ を仮定する。多くの場合，動学的性質が簡単になり[1]，結論を見通しやすく，若しくは解析解を導けるようになる。

$\Phi(u;1)=-\phi+\frac{\Gamma(\alpha)u}{1-u}$ となる。そして

$$\Phi(u;1)\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0 \quad\Longleftrightarrow\quad u\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\frac{\phi}{\Gamma(\alpha)+\phi}\big(\equiv \bar{u}\in(0,1)\big).$$

となる。

先ず $u\in(0,\bar{u})$ のケースを考える。この場合，直ちに $\dot{u}<0 \quad \text{for} \quad \forall u\in(0,\bar{u})$ となって解無し。一方で $u\in(\bar{u},1]$ の場合，

$$\dot{u}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0 \Longleftrightarrow \chi\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\frac{\rho+\eta n}{\Phi(u;1)\delta(1-u)^{\eta}}(\equiv \Xi(u)) \tag{42}$$

[1] 一番有名なのが世代重複モデルのそれであろう。

となり，此処で $\Xi(u)$ の $u \in (\bar{u}, 1)$ での性質は以下の通り：

$$\Xi'(u) < 0, \quad \lim_{u \to 1} \Xi(u) = 0, \quad \lim_{u \to \bar{u}} \Xi(u) = \infty.$$

従って Fig.2 を得る。

Fig.1 と Fig.2 を組み合わせて Fig.3 の位相図が書ける。長期の定常状態は鞍点安定である。

References

[1] Arnold, L. G. (1998) "Growth, welfare, and trade in an integrated model of human-capital accumulation and research," *Journal of Macroeconomics* Volume 20, Issue 1, Pages 81-105

[2] Barro, R. J., & X. Sala-i-Martin (2003) *Economic Growth* 2nd Edition, MIT Press

[3] Benhabib, J., R. Perli, and D. Xie. (1994) "Monopolistic competition, indeterminacy and growth" *Ricerche Economiche* 48, 279-298.

[4] Jones (1995) "R&D-based model of Economic Growth" *Journal of Political Economy* Vol.103 No.4 759-784.

[5] Romer, D., (2011) *Advanced Macroeconomics* The Mcgraw-hill Series in Economics.

[6] Romer, Paul M., (1990) "Endogenous Technological Change" *Journal of Political Economy* Volume 98, Number 5, Part 2 pp. S71-S102

[7] 岩井 克人 (1994) 「経済成長」　岩井克人・伊藤元重編『現代の経済理論』所収　東大出版会

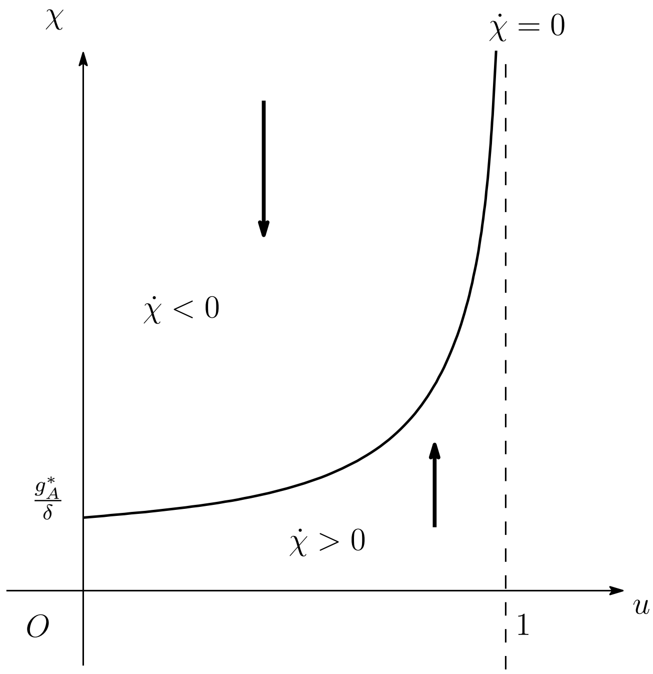

Figure 1: Dynamics of χ

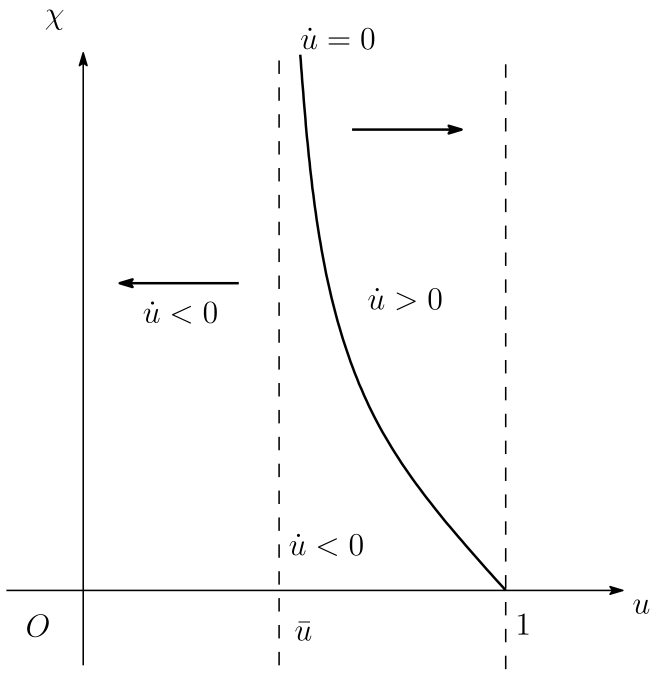

Figure 2: Dynamics of u

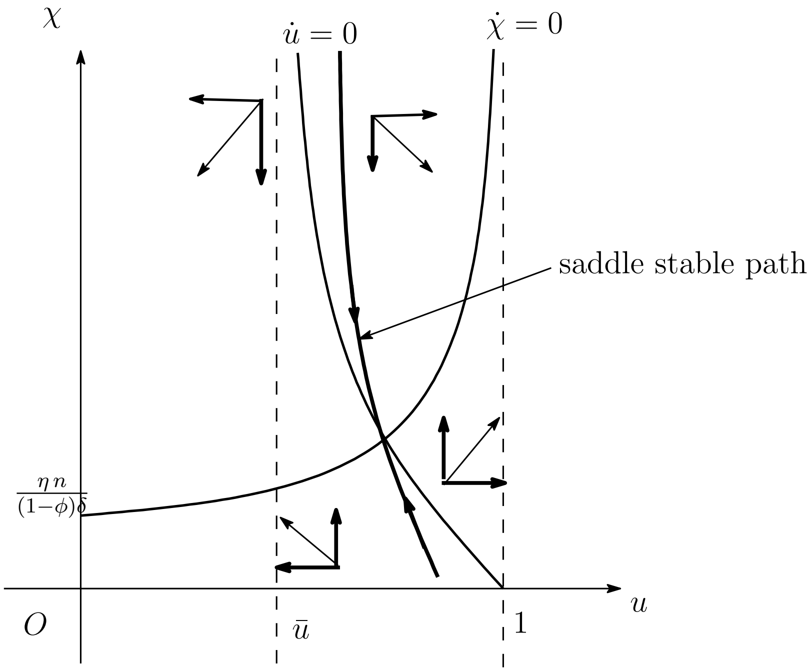

Figure 3: Phase diagram of u and χ