The Aghion and Howitt Model

Shiro KUWAHARA *
University of Hyogo

作成:December.7.20 / 改訂: July 7, 2022

0.1 導入

本章では Grossman & Helpman (1991) や Aghion and Howitt (1992) を嚆矢とする品質向上モデルを分析する。

Romer (1990) model は特許期間が永続的と仮定されて一度発明した財からは永久に独占利潤を得られるような設定になっていたが，Schumpeter の発想は創造的破潰であって独占者の交代であった。それが定式化される。

モデルは Romer モデルとよく似ているが中間財の数は一定とされ代わりに各財の生産性が上昇していく。

本章では簡略化の為に (原論文とほぼ同じ設定であるが) 労働は１種類，資本も無しとする。一方で初期の Aghion-Howitt モデルは１部門モデルであることも多かったが多部門モデルとする。実証的にも多部門が自然であり，また理論的にも連続時間で大数の法則が使えるので資産の取扱が簡単になるなどのメリットがある。

本稿では先ずモデルを設定し，その定常状態と動学的性質を調べ結論を述べる。

Aghioin & Howitt などは自分らのモデルに含まれる独占社の交代を創造的破壊の定式化であることを誇って Schumpeterian model 等と自称する事もある (例えば Aghion and Howitt 1998)。一方で独占社が必ず交代する形式になっている (現行独占社に R&D の誘因が無い) がそこを批判されて代替モデルの提示などが行われている。将来的にはその辺の拡張も本稿内で提示していきたいが現時点では未完成である。

*E-mail: kuwahara@econ.u-hyogo.ac.jp Tel/Fax: +81-78-794-5409 Postal Address: Economics faculty, University of Hyogo, Gakuen-nishimachi Nishi ward, Kobe, Japan

0.2 The Model

0.2.1 Production

最終財生産に於いて，中間財，労働を投入する。中間財は最終財から作られる。労働は最終財生産 (L_Y) か R&D(L_A) に投入されると仮定する。従って労働の資源制約式は $L_A + L_Y = L$ となる。ここで L は人口と同一視される労働賦存量であり，外生・一定であると仮定される。

最終財は労働と一群の中間財から生産される。その中間財の数 A は十分大きく (Romer model とは対照的に) 一定 (fixed) と仮定される：

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \{q(i)x(i)\}^\alpha di \quad (\alpha \in (0,1)) \tag{1}$$

ここで $x(i)$ は第 i 部門の中間財投入量であり，$q(i)$ が各中間財の品質の水準であり，各部門での R&D を通じて各部門の $q(i)$ は上昇することになる。この品質向上がこの Aghion-Howiit model での成長の源泉であり，新しい品質が発明される度に古い製品の発明者が保持していた独占的地位が崩れることになるが，Aghion-Howiit らはそれを Schumpeter が資本主義の発展に重要だと強調した"創造的破潰" に対する対応物であると主張し，自らを Shuumpeterian growth model と強調した。

各中間財の生産効率は品質 quality と呼ばれ，此処では階段状に上がっていくと仮定される。これを品質階梯 (quality ladder) と呼ぶ。各階梯を上がる毎に生産性は外生的に与えられ一定と仮定される $\lambda(>1)$ 倍となるとする。ここで λ は技術革新の巾 (width) となる。この時各品質階梯の生産効率は $\lambda, \lambda^2, .., \lambda^{m(i)}$ for the quality index $m_i = 1, 2, ..., m(i)$ と書ける。

こうして我々は生産函数を $Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A \lambda^{m(i)} x(i)\}^\alpha di \; (\alpha \in (0,1))$ と特定化したことになる。 そして，この設定の下では，品質ランク m を持つ 1 単位の第 i 部門の中間財は品質ランク $m-1$ を持つ同じ第 i 部門の中間財 λ 単位の同等物となる。$q(i)x(i)$ という各部門の中間財の設定は同一部門内の各品質階梯間で品質分を調整すれば完全代替である事を示している。垂直的な完全代替性が Aghion and Howitt model の一つの特徴と成っている。

中間財は最終財 $\eta(>1)$ 単位から生産されると仮定し，発明の特許は (最新の技術が発明されるか否かに拘わらず) 永続的に有効であると仮定し，現在の第 i 部門の最高の品質を開発した企業が独占権を持っていると仮定すると，その企業は $p(i) = \lambda\eta - \Delta$ の限界価格付け (limit pricing) を行うことで次位以下の企業を市場から排除することが可能となり独占を維持することが可能となる。この限界価格付けの条件を書き直すと

$$p(i) < \lambda\eta \tag{2}$$

となる。

最終財生産部門は完全競争であると仮定され，この仮定の下で恰も一つの企業で生産が行われるとかんがえることができ，その一階の条件は以下の様にな：

$$\frac{\partial Y}{\partial x(i)} = p(i), \quad \text{and} \quad \frac{\partial Y}{\partial L_Y} = w_Y, \tag{3}$$

ここで，$p(i)$ と w_Y は第 i 部門の中間財の価格と最終財部門で決まる均衡労賃となる。

現時点で最高品質を開発しその特許を持つ企業の利潤は $\pi(i) = p(i)x(i) - \eta\, x(i)$ で与えられ，企業は限界価格付けと (3) の制約の下でこの利潤を最大化する。

この最適化問題を解くと，今 (2) が成立している前提のもとで

$$x(i) = \left[\frac{\alpha^2}{\eta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad \text{and} \quad p(i) = \frac{\eta}{\alpha} \tag{4}$$

を得る。(2) と (4) より独占価格付け $p(i) = \frac{\eta}{\alpha}$ が成立する為には $\lambda > 1/\alpha$ が成立している必要がある。$\lambda < 1/\alpha$ の場合は $p(i) = \lambda\eta$ が成立し，

$$x(i) = \left[\frac{\alpha}{\lambda\eta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \qquad \text{and} \quad p(i) = \eta\lambda \tag{5}$$

となるが，本質的には同様の結論が得られる。

ここでは品質階梯巾の成長への影響を見る為に $\lambda < 1/\alpha$ を仮定するが，逆の場合は λ を $1/\alpha$ に置き換えればその場合の結論は直ちに得られる。

ここで，総品質指数 Q を $Q \equiv \int_0^A q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} di$ で定義する。

(5) を総生産函数 Y に代入して Q の定義を利用すると

$$Y = \left(\frac{\alpha}{\eta\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L_Y Q. \tag{6}$$

この様に最終財生産は L_Y と Q に関する線形の函数と成っている。(5) を全部門で集計すると

$$Z = \eta \int_0^A x(i) di = \eta \left(\frac{\alpha}{\lambda\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_Y Q \left(= \frac{\alpha}{\lambda} Y\right). \tag{7}$$

ここで $\lambda > 1 > \alpha$ より $\alpha/\lambda \in (0,1)$ であり，中間財の使用量 Z は常に最終財の生産量の範囲内であり，更に一定率となる事が解る。また最終財は中間財

投入 (Z) か最終消費財 (C) として使用されると仮定する。この場合の最終財の資源制約は $Y = C + Z$ となる。(6)(7) とこの資源制約より

$$C = \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) Y \tag{8}$$

となる。$\lambda > 1 > \alpha$ なので非負条件は常に満たされる点にも注意されたし。

$\pi(i)$ の定義及び (5) より現時点での最高品質 $m(i)$ を開発しその特許を持つ第 i 部門の独占企業の利潤は

$$\pi(i) = (\lambda - 1)\frac{Y}{Q} q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{9}$$

で与えられる。

0.2.2 R&D Activities

但し潜在的に次の最高品質開発成功企業は常に存在していて，市場の独占を狙っている。この (第 i 部門の) 次の潜在的なトップ品質企業を i^+ と書くとする。次の品質水準は現行の λ 倍であるから，$q(i^+) = \lambda^{m(i^+)} = \lambda^{1+m(i)}$ と書ける。

この経済での R&D 活動は一つ上の品質を発明するものであり，R&D には労働が使われる。R&D の成功は労働投入に比例し，確率的に得られる。この辺の設定は Barro and Sala-i-Martin (1995 Ch7) と基本的に同じである。

各部門の R&D は自由参入であり， 多数の企業が各部門で R&D に参入してくる。そして或る部門 i で成功が発生した時に，その部門の R&D に従事していた企業 j が成功する確率はその部門 i に投下された研究開発労働に対する企業 j の投下労働のシェアに比例する。詰まりその部門 i に投下された研究開発労働を $L_A(i)$ とし R&D 企業 j の第 i 部門への投下労働を $L_A(i,j)$ とすると部門 i で R&D が成功した時の企業 i_j が成功する確率は $L_A(i,j)/L_A(i)$ となる。

従って第 i 部門での R&D の成功確率を $\mu(i)$ とすると，

$$\max_{L_A(i,j)} \quad \mu(i)\frac{L_A(i,j)}{L_A(i)} v(i) - wL_A(i,j).$$

となる。ここ $v(i)$ は第 i 部門の新発明によって得られ以下の様に定義される期待独占利潤の流列である。

$$v(i) = E\left[\int_0^\infty \pi(i,\tau) e^{-\int_0^\tau r(s)ds} d\tau.\right]. \tag{10}$$

利潤式の前半が (収入)，後半が (支出) である。R&D は自由参入であるから (収入)>(支出) の場合は無限の R&D 投入が流入することにより労賃が上がるなどの調整が効き均衡しない。調整が行われる結果均衡では研究開発が行われている場合は (収入)=(支出) であり，R&D が発生しない場合は (収入)<(支出) となる。即ち

$$\frac{\mu(i)}{L_A(i)}v(i)\left\{\begin{array}{c} = \\ < \end{array}\right\} w \Longleftrightarrow L_A(i)\left\{\begin{array}{ll} >0 & \text{正の R\&D} \\ =0 & \text{R\&D なし} \end{array}\right. \tag{11}$$

(3) で与えられている w を条件 (11) の等式に代入すると

$$v(i)=\frac{1-\alpha}{\mu(i)}\frac{Y}{L_Y}L_A(i) \tag{12}$$

となる。これが R&D 発生期に企業価値 $v(i)$ が満たすべき性質である。

この $v(i)$ を時間微分すると資産方程式 $rv(i)=\pi(i)+\dot{v}(i)-\mu(i^+)v(i)$ を得る。ここで $\mu(i^+)$ はこの部門の次世代の最高品質の成功確率である。

この資産方程式に (9) と (12) を代入して以下を得る：

$$r+\mu(i^+)=\frac{\mu(i)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{Y}{Q}q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}L_A(i)}+\frac{\dot{v}(i)}{v(i)}. \tag{13}$$

(13) より，右辺第一項を整理すると

$$(\text{右辺第一項})=\frac{\mu(i)\frac{1}{Q}q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\alpha\frac{1}{L_Y}L_A(i)}=\frac{\mu(i)}{\alpha}\frac{\frac{q(i)}{Q}}{\frac{L_A(i)}{L_A}}$$

となる。

定常状態では利子率 r，R&D 成功率，企業価値成長率が一定値である必要があるので (右辺第一項) も (定常状態で) 定数である必要がある。

ここでは簡略化の為に (右辺第一項) が常に定数であると仮定する。詰まり i 部門の研究開発成功確率 μ は経済全体の品質に対する第 i 部門の相対品質の減少函数であり，経済全体の R&D 労働投入に対する第 i 部門の相対シェアの増加函数であると仮定する[1]。そしてこれらの影響は線形であるとする。

[1] L と Q は，それぞれ，(6) で示される人口と経済効率に関して線形の最終財生産函数内の質的・量的指標となっている。

それ故，(14) は R&D の成功確率は R&D の投入の経済規模に関するシェアに関して正の，経済効率に対して部門の効率性シェアに関して負の効果があることになる。後者はより高い品質の研究開発がより困難になることから自然だと考えられているが，前者に関しては疑問が呈されている。

斯くしてR&D成功のポアソン到着率が係数を$\xi > 0$として以下の様に仮定される。

$$\mu(i) = \xi \frac{\frac{L_A(i)}{L}}{\frac{q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{Q}}, \qquad \xi > 0. \tag{14}$$

この(14)を(13)に代入すると

$$v(i) = \frac{1-\alpha}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\lambda\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} lL. \tag{15}$$

を得る。但しここで$l \equiv L_Y/L$であり，労働者の最終財部門での雇用比率である。部門独自の要素である品質$q(i)$以外は各独占企業は同質であり，また成長する唯一の要素は経済の人口規模Lである。後者は条件式$\frac{\dot{v}(i)}{v(i)} = n$を産む。

この$\mu(i)$の特定化(14)と(6), (12)を利用して(13)は以下の様に成る：

$$\mu^+ = \frac{\xi}{\alpha} l + n - r, \tag{16}$$

を得る。

定常状態では現行企業が開発時に経験した自分のR&D成功函数$\mu(i)$と独占利潤享受時に経験するライバル(潜在的には自分を蹴落とす現行のR&D実行企業の直面する)R&D成功函数$\mu(i^+)$は一定で在る必要があるから$\mu(i) = \mu^+$であり，これと(14)と(16)より$\mu = \mu(i) = \mu^+$を消去して$L_A(i)$に付いて解くと$L_A(i) = \frac{q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L}{\xi Q}\left[\frac{\xi}{\alpha} l + n - r\right]$を得る。これを$i$に関して集計すると研究開発部門で雇用される労働量の集計量$L_A = (1-l)L = \int_0^N L_A(i) di$が出て，これらが利子率$r$と労働者配分比$l$の関係を

$$r - n = \left\{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) l - 1\right\} \xi, \quad \text{or} \quad l = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{r-n}{\xi} + \alpha\right). \tag{17}$$

の様に示す。更に(16)と(17)からμをlの函数として以下の様になる。

$$\mu = \xi(1-l). \tag{18}$$

0.2.3 Household

モデルを閉じる為に家計の設定が必要となる。標準的なRamsey typeの家計が仮定されるとCRRAパラメータをθ，主観的割引率をρとすると通常のEuler方程式を得ることになる：

$$\theta \frac{\dot{c}}{c} + \rho = r - n. \tag{19}$$

(6) と (8) より

$$c = \frac{C}{L} = \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\alpha}{\lambda\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} lQ \tag{20}$$

であるからこれと (19) より

$$\theta\left(\frac{\dot{l}}{l} + n + \frac{\dot{Q}}{Q}\right) = r - \rho \tag{21}$$

を得る。

0.3　動学と定常状態とそれらの性質

0.3.1　動学とその安定性

Q の定義より，第 i 部門のイノベーションによる品質向上の向上分は $R(i) \equiv q(i^+)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ で定義され，これは $R(i) = q(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1)$ と計算される。また部門数 N は十分大きいと仮定された。この時，社会全体の品質指標 Q の動学は以下で示される：

$$E(\dot{Q}) = \int_0^N R(i)di = \mu(\lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1)Q. \tag{22}$$

(18) と (22) より，Q の動学は l の函数として以下の様に与えられる。

$$g_Q = \mu(\lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1) = \xi(1-l)\Lambda, \tag{23}$$

ここで $\Lambda \equiv \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1 > 0$ 及び $g_Z \equiv \dot{Z}/Z$ である．$\partial\Lambda/\partial\lambda > 0$ より Λ は品質の向上の大きさのパラメーターとなる。

(11) と (14) より，市場全体の R&D 企業価値 V はis calculated as

$$V = \int_0^A v(i)di = \int_0^A \frac{wL_A(i)}{\mu(i)}di = \frac{(1-\alpha)Y}{\xi l}, \tag{24}$$

となり，ここで $w = (1-\alpha)Y/(lL)$ を使っている。我々は代表的家計を仮定しており，株式がこの経済の唯一の資産なので，一人当たりの資産保有残高 a が以下で与えられる。

$$a = \frac{V}{L} = \frac{(1-\alpha)y}{\xi l} = \frac{1-\alpha}{\xi}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\eta^{-\frac{1}{1-\alpha}}Q, \tag{25}$$

ここで第三項は (6) の y を利用している。この式はこの経済の家計辺りの資産保有額が技術水準と比例的な関係にあり，同じ率で上昇していくことを示している。

定義上 $C = cL$ であり，c の動学は (21) で与えられているので (17) と (23) を代入して $l(t)$ の動学方程式

$$\theta\left[\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} + n + \xi(1 - l(t))\Lambda\right] = \left[\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) l(t) - 1\right]\xi - \rho \tag{26}$$

を得る。これを変形すると l の成長率は以下で示されるように g_l 切片が負，l の傾きが正の一次式なので，系は不安定であり，唯一の $g_l = 0$ を満たす l^* を定常状態とする常に定常状態のみが実現する。

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{\theta}\left\{\left[\frac{1}{\alpha} + (1 + \theta\Lambda)\xi\right] l - \left[(1 + \theta\Lambda)\xi + \rho + n\right]\right\} \tag{27}$$

で，$\dot{l} = 0$ を与える l^* は以下で示される。

$$l^* = \frac{(1 + \theta\Lambda)\xi + \rho + n}{\frac{1}{\alpha} + (1 + \theta\Lambda)\xi}, \tag{28}$$

0.3.2 定常状態とその性質

定常状態では l は (28) で与えられる $l = l^*$ であり，(23) より g_Q が一定の成長率で成長する。また各変数も $l = l^*$，$g_Q = (const)$ の元で一定の成長率で成長していく：

$$g_c = g_Y - n = g_y = g_A = g_Q. \tag{29}$$

(18), (23), (29) そして (28), より，経済成長率は

$$g_y^* = g_Q^* = \underbrace{\frac{\left\{\frac{1}{\alpha} - (\rho + n)\right\}\xi}{\frac{1}{\alpha} + (1 + \theta\Lambda)\xi}}_{\mu^*}\Lambda. \tag{30}$$

の様に導出できる。式 (30) より以下を得る。

Proposition 成長率はより高い R&D 効率 ξ，Λ で促進され，より高い人口成長率 n や主観的割引率 ρ で抑制される事が判明する。

正の経済成長の定常状態の存在を保証する条件は $l^* \in (0, 1)$ である。

$l^* \geq 1$ の時，経済は R&D に資源を配分せず経済は貧困の罠に陥ることになる。(28) より，以下を得る

$$\rho + n \left\{\begin{array}{c} < \\ \geq \end{array}\right\} \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{正の成長率での定常成長経路} \\ \text{ゼロ成長での停滞} \end{array}\right. \tag{31}$$

Proposition　R&D 効率が高く，人口成長や主観的割引率が低い経済が成長が高く，人口成長や主観的割引率が高く，労働シェアが低い国が貧困の罠に陥る傾向にある。

References

[1] Aghion, P., Howitt, P., (1992) ”A Model of Growth Through Creative Destruction,” *Econometrica* Vol. 60, No. 2 (Mar., 1992), pp. 323-351 (29 pages)

[2] Aghion, P., Howitt, P., (1998) ”A Schumpeterian Perspective on Growth and Competition,” in Fabrizio Coricelli, Massimo di Matteo, Frank Hahn, and Frank Hahn eds. *New Theories in Growth and Development.* Springer.

[3] Barro, R., Sala-i-Martin, X., 1995. *Economic Growth.* Boston: McGraw Hill.

[4] Grossman, G., Helpman, E., 1991. *Innovation and Growth in the Global Economy.* Cambridge: MIT Press.

[5] Romer, P., 1990. Endogenous Technological Change. Journal of Political Economy 98, S71–S102.

[6] Schumpeter, J., 1911 . Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung: eine Untersuchung über Unternehmerwinn, Kapital, Kredit, Zins und den Konjunkturzyklus, in German.