The One sector Human Capital Accumulation model

Shiro KUWAHARA

June 14, 2024

1 緒言

貧困の罠を研究対象にしていた私は，研究投入要素が外生的賦存の人的資源[1]で与えられる Romer 型 R&D モデル (Romer 1990) をモデル内で内生的に総量が決定される資本に代替して分析することが良く合った (Kuwahara 2006, 2013, 2019)。初期の内生的成長理論に lab-equippinet model など財を投入するモデルは幾つもある (Rivera-Batiz and Romer 1991, Barro & Sala-i-Martin 1995 Ch6) があるが，人的資本の投下がメインになって資本財投入 (のみ) にレフリーから疑問を投ぜられることも起きるようになった。そんなときに活躍してくれたのが Barro & Sala-i-Martin (1995 Ch4) 等で示された本モデルである。

本モデルは人的資本と物的資本を導入し，本質的には Ramsey タイプと変わらない完全競争の市場競争を持ちつつ，資本減耗に関わる仮定のもとで振る舞いは AK モデルに帰着させつつ，長期の成長の決定要因になる A を内生的に説明出来る他，人的資源も自然な形で導入出来る優れものである。

2 The model

The production function of final goods:

$$Y = F(K, H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{1}$$

生産函数は通常の規模に関する収穫一定と稲田条件を満たす新古典派生産函数で有り，Cobb-Douglas 型を仮定する。K, H はそれぞれ物的，人的資本である。

[1] Romer(1990) は人的資本と呼んでいたが蓄積したりはしない

人的資本と物的資本の蓄積は最終財投資でなされる。

$$\dot{K} = I_K - \delta_K K \tag{2}$$

$$\dot{H} = I_H - \delta_H H \tag{3}$$

最終財は両資本投資の他，消費財として消費され，経済全体の資源制約は以下の様になる。

$$F(K, H) = I_K + I_H + C. \tag{4}$$

ここで C は消費である。

効用：

$$U = \int_0^\infty u(C(t))e^{-\rho t}dt. \tag{5}$$

ここで $u(\cdot)$ は瞬時的効用函数であり通常の CRRA タイプとして仮定される。

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}. \tag{6}$$

本モデルの市場は完全で歪みがないので Ramsey model として中央集権的に解いてしまって良い。

当該期価値ハミルトニアンを以下の様に与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = u(C) &+ \lambda\{F(K,H) - (I_K + I_H + C)\} \\ &+ \mu_K\big(I_K - \delta_K K\big) + \mu_H\big(I_H - \delta_H H\big).\end{aligned} \tag{7}$$

最適化条件は以下の様に得る：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(C) = \lambda, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu_K, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu_H, \tag{10}$$

$$\rho\mu_K - \dot{\mu}_K = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \lambda\alpha K^{\alpha-1}H^{1-\alpha} - \mu_K\delta_K, \tag{11}$$

$$\rho\mu_H - \dot{\mu}_H = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = \lambda(1-\alpha)K^{\alpha}H^{-\alpha} - \mu_H\delta_H. \tag{12}$$

(8) と (9) と (10) より以下を得る：

$$u'(C) = \lambda = \mu_K = \mu_H. \tag{13}$$

(11) と (12) と (13) より

$$\rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha} - \delta_K = (1-\alpha) K^{\alpha} H^{-\alpha} - \delta_H. \tag{14}$$

(14) より

$$\alpha \left(\frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} - \delta_K = (1-\alpha) \left(\frac{K}{H} \right)^{\alpha} - \delta_H. \tag{15}$$

Fig.1 より K/H は一意に決まることが判る。ここで分析を簡単にする方法として $\delta_K = \delta_H (\equiv \delta)$ とすればよい。この時

$$\left(\frac{K}{H} \right)^{*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \text{namely} \quad H = \frac{1-\alpha}{\alpha} K \tag{16}$$

を得る。詰まり α が小さい場合は $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ が大きくなり K に対してより大きな H を経済は装備する事になる。

(16) の関係が常に成立するので (16) を (1) に代入すると

$$Y = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} K = A(\alpha) K \tag{17}$$

となる。ここで

$$A(\alpha) \equiv \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \tag{18}$$

である。$A(\alpha)$ は $(0, 0.5)$ で $A'(\alpha) < 0$(単調減少), $(0.5, 1)$ で傾きは変化するものの $A(\alpha) < 1$ を維持し, $\lim_{\alpha \to 0} A(\alpha) = \infty$, $A(0.5) = 1$, $\lim_{\alpha \to 1} A(\alpha) = 1$ を満たすような函数である。α が低い時に A は高くなる。

この時, モデルは AK モデルに帰着し以下が成立する。

$$R(\alpha) \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial H} = \alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \tag{19}$$

$R(\alpha)$ は以下の性質をもつ。

$$\frac{dR(\alpha)}{d\alpha} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \text{for} \quad \alpha \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} \frac{1}{2}$$

ので, $R(\alpha)$ は $\alpha = 0.5$ で最小値 $R(0.5) = 0.5$ を持つ。また $R(\alpha) = \alpha A(\alpha)$ である。

モデルから得られる The Euler 方程式に R を代入すると

$$\theta\frac{\dot{C}}{C} = R(\alpha) - \delta - \rho = (const) \tag{20}$$

を得る。モデルは遷移動学を持たず Y,K,H,C の全変数が一定の成長率 $g^* \equiv (1/\theta)(R-\delta-\rho)$ で定常成長する。

これらより

$$g^* = (1/\theta)(R-\delta-\rho) = \frac{I_K}{K} - \delta = \frac{I_H}{H} - \delta \tag{21}$$

$$Y = AK = C + I \tag{22}$$

が成立する。ここで $I \equiv I_K + I_H$ である。これらより

$$Y = AK \tag{23}$$

$$I = \frac{g^* + \delta}{\alpha}K \tag{24}$$

$$C = \left(A - \frac{g^* + \delta}{\alpha}\right)K \tag{25}$$

が成立する。貯蓄率 s を計算してみると

$$s = \frac{I}{Y} = \frac{\frac{1}{\theta}(R(\alpha)-\rho) - \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\delta}{R(\alpha)}$$

となる。$\theta = 1$，$\delta = 0$ の時，$s = 1 - \rho/R$ となり限界消費性向 $c = \rho/R$ となる。

3 Extentoin with the population growth

但し，内生成長可能性はモデルの生産函数の形状に依存する事になる。以下でそれを確かめるために最終財生産函数に労働を入れ，労働供給には人口成長を入れて見る。

$$Y = F(K,H,L) = K^{\alpha}H^{\beta}L^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha, \beta, 1-\alpha-\beta \in (0,1). \tag{26}$$

生産函数は通常の規模に関する収穫一定と稲田条件を満たす新古典派生産函数で有り，Cobb-Douglas 型を仮定する。L は人口規模と同一視され非弾力的に供給される労働である。人口成長率は n と仮定する。詰まり $\dot{L} = nL$ となる。

人的資本と物的資本の蓄積は最終財投資でなされる。

$$\dot{K} = I_K - \delta_K K \tag{27}$$

$$\dot{H} = I_H - \delta_H H \tag{28}$$

最終財は両資本投資の他，消費財として消費され，経済全体の資源制約は以下の様になる。

$$F(K, H, L) = I_K + I_H + Lc. \tag{29}$$

ここで c は一人当たり消費である。

効用：

$$U = \int_0^\infty u(c(t))e^{-\rho t}dt. \tag{30}$$

ここで $u(\cdot)$ は瞬時的効用函数であり通常の CRRA タイプとして仮定される。

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}. \tag{31}$$

本モデルの市場は完全で歪みがないので Ramsey model として中央集権的に解いてしまって良い。

当該期価値ハミルトニアンを以下の様に与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = u(c) + \lambda\{F(K, H) - (I_K + I_H + cL)\}\\ + \mu_K\big(I_K - \delta_K K\big) + \mu_H\big(I_H - \delta_H H\big).\end{aligned} \tag{32}$$

最適化条件は以下の様に得る：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(c) = \lambda L, \tag{33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu_K, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu_H, \tag{35}$$

$$\rho\mu_K - \dot{\mu}_K = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \lambda\alpha K^{\alpha-1}H^{1-\alpha} - \mu_K\delta_K, \tag{36}$$

$$\rho\mu_H - \dot{\mu}_H = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = \lambda(1-\alpha)K^{\alpha}H^{-\alpha} - \mu_H\delta_H. \tag{37}$$

(33) と (34) と (35) より以下を得る：

$$\frac{u'(c)}{L} = \lambda = \mu_K = \mu_H. \tag{38}$$

(36) と (37) と (38) より

$$\rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha} - \delta_K = (1-\alpha) K^{\alpha} H^{-\alpha} - \delta_H. \tag{39}$$

(39) より

$$\alpha K^{\alpha-1} H^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} - \delta_K = \beta K^{\alpha} H^{\beta-1} L^{1-\alpha-\beta} - \delta_H. \tag{40}$$

ここで分析を簡単にする方法として $\delta_K = \delta_H (\equiv \delta)$ とすればよい。この時

$$\left(\frac{K}{H}\right)^* = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{namely} \quad H = \frac{\beta}{\alpha} K \tag{41}$$

を得る。(41) の関係が常に成立するので (41) を (26) に代入すると

$$Y = B(\alpha, \beta) K^{\alpha+\beta} L^{1-\alpha-\beta} \tag{42}$$

となる。ここで

$$B(\alpha, \beta) \equiv \alpha^{-\alpha} \beta^{\beta} \tag{43}$$

である。この時，モデル Ramsey モデルに帰着し以下が成立する。

$$r \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial H} = \alpha B(\alpha, \beta) k^{\alpha+\beta-1} \tag{44}$$

where $k = \frac{K}{L}$, 一人当たり資本 (相当物) 装備率である。単純な資本装備率ではないのはこの裏側に物的資本に比例した人的資本が存在しているから。

モデルから得られる The Euler 方程式に r を代入すると

$$\theta \frac{\dot{c}}{c} = \alpha B(\alpha, \beta) k^{\alpha+\beta-1} - \delta - \rho - n \tag{45}$$

を得る。

一方，(27)，(28)，(41) より

$$I_H = \frac{\beta}{\alpha} I_K. \tag{46}$$

(46) を (27) 及び (28) 更に (29) に代入して

$$cL + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(\dot{K} + \delta K) = Y \tag{47}$$

両辺を L で割って

$$c + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(\dot{k} + (n+\delta)k) = B(\alpha, \beta) k^{\alpha+\beta}. \tag{48}$$

詰まりモデルは $\dot{c}$ に関する (45) と $\dot{k}$ に関する (48) の２本からなる Ramsey 型になり，k は定常状態で定数となり，従って K は，それ故に H も，人口成長で成長することになり，長期の一人当たり所得は成長せず，Kaldor の定型化された事実とは整合的ではなくなってしまう。

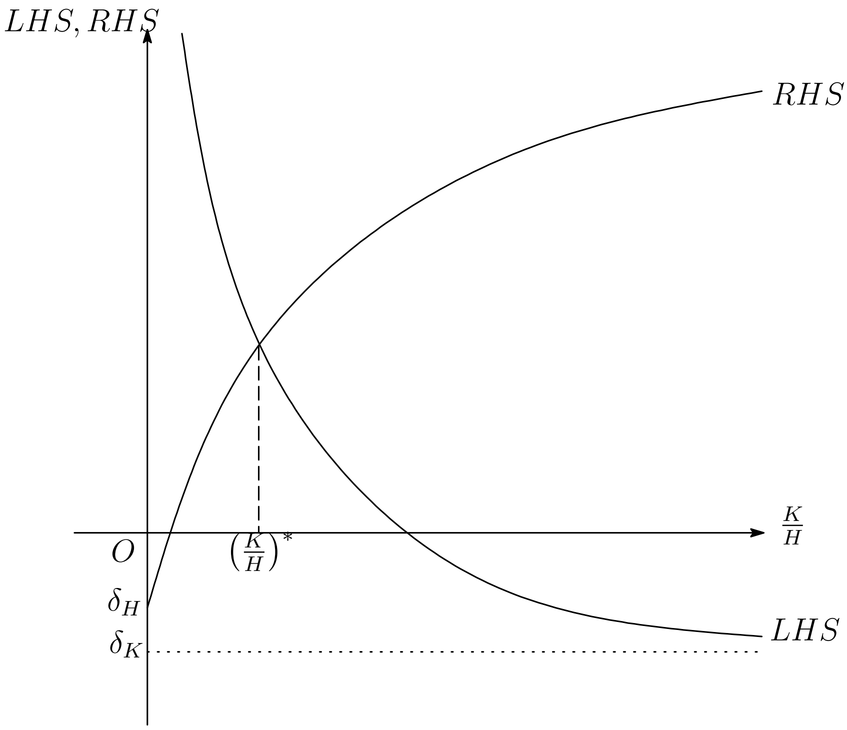

Figure 1: Determination of K/H

References

[1] Barro, Robert J. and Xavier Sala-i-Martin (1995) *Economic growth*. McGraw-Hill.

[2] Kuwahara, Shiro (2007) "The Mechanics of Economic Growth through Capital Accumulation and Technological Progress," *The Japanese Economic Review*. Vol. 58, No. 4, pp. 504-523

[3] Kuwahara, Shiro (2013) "Dynamical Analysis of the R&D-based Growth Model with a Regime Switch" *Journal of Economics (JEZN)*,

[4] Kuwahara, Shiro (2019) "Multiplicity and Stagnation under the Romer Model with Increasing Returns of R&D " *Economic Modelling* Volume 79, June 2019, Pages 86-97

[5] Rivera-Batiz, Luis A. and Paul M. Romer (1991) "Economic Integration and Endogenous Growth" *The Quarterly Journal of Economics* Vol. 106, No. 2 (May, 1991), pp. 531-555

[6] Romer, Paul M. (1990) "Endogenous Technological Change" *Journal of Political Economy* Vol. 98, No. 5, Part 2 (Oct., 1990), pp. S71-S102 (32 pages)